



Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles

Vu-Hieu Nguyen

► To cite this version:

Vu-Hieu Nguyen. Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002. Français. <tel-00338921>

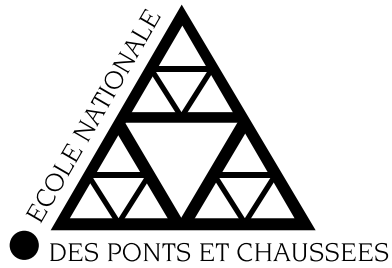
HAL Id: tel-00338921

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00338921>

Submitted on 14 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

Vu Hieu NGUYEN

Sujet de la thèse :

**Comportement dynamique de structures non-linéaires
soumises à des charges mobiles**

soutenue le 8 mars 2002
devant le jury composé de :

Président :	P.E. GAUTIER
Rapporteurs :	D. CLOUTEAU D. LE HOUEDDEC
Examineurs :	G. GARY B. NEDJAR K. SAB
Directeur de thèse :	D. DUHAMEL

A mes parents

Remerciements

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Denis Duhamel, mon directeur de thèse, qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique et qui, par son expérience et sa compétence, m'a transmis, pas à pas, sa passion pour la Dynamique des Structures. Il m'a laissé une grande liberté dans la recherche mais a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour.

Je tiens à remercier Alain Ehrlacher, le directeur du LAMI (Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification), pour m'avoir accueilli dans son laboratoire. J'ai pu travailler dans un environnement de recherche exceptionnel autant du point de vue des qualités humaines que celles scientifiques. Qu'il en soit remercié.

Je remercie vivement Pierre-Etienne Gautier, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, Didier Clouteau et Donatien Le Houédec, qui ont accepté d'en être les rapporteurs et que je remercie pour le temps qu'ils ont passé à évaluer mon manuscrit.

Ma gratitude va à Boumedienne Nedjar pour sa gentillesse et son intérêt scientifique. Il a su me consacrer du temps chaque fois que je le sollicitais.

Mes plus vifs remerciements vont également aux examinateurs, Gérard Gary et Karam Sab qui, par de nombreuses discussions, par les idées précieuses et importantes, ont contribué à l'orientation de ce travail.

Je suis aussi reconnaissant au LMS (Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique), pour les moyens qui ont été mis à ma disposition pour la partie expérimentale.

J'adresse de chaleureux remerciements à tous les membres du LAMI, permanents, thésards ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques ou amicaux m'ont fait de bons souvenirs inoubliables.

Je tiens à remercier du fond du coeur ma famille pour son soutien et son encouragement sans faille malgré la grande distance. C'est son amour qui m'a aidé à passer les moments les plus difficiles pendant ces années d'études à l'étranger. Je remercie aussi tous mes amis pour nos discussions plus ou moins sérieuses et avec qui j'ai passé d'agréables moments. Merci à Mai Trang pour sa patience, sa compréhension et son encouragement.

Table des matières

Introduction	6
I Introduction aux problèmes de charges mobiles	9
1 Synthèse bibliographique	11
1.1 Introduction.	11
1.2 Les deux applications.	11
1.2.1 Voies ferroviaires.	11
1.2.1.1 Description de la structure des voies ferrées.	11
1.2.1.2 Modélisation des voies ferrées.	14
1.2.2 Voies routières	16
1.2.2.1 Modèle de dimensionnement des chaussées	16
1.2.2.2 Méthode de calcul des chaussées - ALIZE	17
1.2.3 Sur la vibration induite par le trafic.	17
1.3 Rappel sur les problèmes de dynamique des structures	17
1.3.1 Problème dynamique général dans un milieu continu	17
1.3.2 Problème élastodynamique pour le milieu infini	18
1.3.3 Problème de charge mobile	21
1.4 Méthodes de résolution et résultats existants	23
1.4.1 Méthode semi-analytique	23
1.4.2 Méthode des éléments finis - Condition aux limites absorbantes	27
1.5 Sur le comportement dynamique du matériau ballast.	30
1.5.1 Modèle discret.	30
1.5.2 Modèle continu	31
1.6 Conclusion	31
2 Charge harmonique mobile sur un demi-espace visco-élastique stratifié	33
2.1 Introduction	33
2.2 Problème posé dans le repère mobile	33
2.2.1 Système d'équations élastodynamiques	33

2.2.2	Changement de variable	34
2.3	Méthode de résolution par la transformation de Fourier	35
2.3.1	Système d'équations dans le domaine des nombres d'onde	35
2.3.2	Détermination des fonctions \hat{U} et \hat{t}	36
2.3.3	Conditions aux limites	38
2.3.4	Établissement et résolution du système d'équations	39
2.3.5	Solution en espace	42
2.4	Validation et exemples numériques	46
2.4.1	Problème statique	46
2.4.2	Problème d'un milieu homogène	47
2.4.3	Problème d'un milieu multicouche	52
2.5	Applications	53
2.5.1	Effet de la vitesse et de la fréquence	54
2.5.2	Effet des couches	55
2.6	Conclusion	56

II Modèles unidimensionnels non-linéaires 57

3 Milieu à comportement uniaxial soumis à une charge mobile 59

3.1	Introduction	59
3.1.1	Modèle simplifié du problème	59
3.1.2	Equation transitoire	60
3.1.3	Equation stationnaire	60
3.1.4	Méthodes de résolution numériques	61
3.2	Solution analytique du problème stationnaire	61
3.3	Solution numérique du problème transitoire	68
3.3.1	Procédure de calcul par la méthode des éléments finis.	68
3.3.2	Validation numérique	71
3.4	Solution numérique du problème stationnaire	75
3.4.1	Equation discrétisée en temps.	76
3.4.2	Equation stationnaire dans le repère mobile.	77
3.4.3	Formulation variationnelle et discrétisation	78
3.4.4	Mise en œuvre de la méthode des éléments finis	80
3.4.5	Etudes paramétriques	81
3.4.6	Problème nonlinéaire	82
3.5	Validation numérique	83
3.5.1	Cas linéaire	83
3.5.2	Cas nonlinéaire	84
3.6	Conclusion	85

4	Milieu unidimensionnel en flexion soumis à une charge mobile	87
4.1	Introduction	87
4.2	Système d'équations dynamiques dans le repère mobile	88
4.2.1	Méthodologie	88
4.2.2	Equation dans le repère mobile	89
4.2.3	Equation dynamique en éléments finis.	92
4.2.4	Etude paramétrique	93
4.3	Validation	94
4.3.1	Vibration linéaire harmonique stationnaire.	94
4.3.2	Condition absorbante	96
4.3.3	Comparaison des résultats analytiques et numériques	97
4.4	Conclusion	99
5	Etudes sur le modèle 1D des voies	101
5.1	Introduction	101
5.1.1	Modèle P1R	101
5.1.2	Modèle P3R	102
5.1.2.1	Modélisation simple de la voie ferrée	102
5.1.2.2	Système d'équations dynamiques	102
5.2	Mise en oeuvre numérique	104
5.3	Modèle P1R	105
5.3.1	Vitesses et fréquences critiques pour le problème linéaire	105
5.3.2	Effet de la non-linéarité	107
5.3.3	Surcharge dynamique sur l'infrastructure.	110
5.4	Modèle P3R	110
5.5	Problème d'appuis discrets	118
5.5.1	Modèle	118
5.5.2	Effet des appuis discrets par rapport au problème continu.	118
5.6	Conclusion	120
III	Modèle tridimensionnel non-linéaire	121
6	Modélisation du comportement 3D du ballast	123
6.1	Introduction	123
6.2	Modèle non-tension des matériaux granulaires	123
6.2.1	Motivation	123
6.2.2	Loi de comportement non-tension des matériaux granulaires	124
6.3	Méthode de résolution numérique	127
6.3.1	Rappel de la méthode des éléments finis pour le problème élastique non-linéaire	127

6.3.2	Équations élastiques dans la base principale des déformations	128
6.4	Identification du comportement statique du ballast	135
6.4.1	Comportement 3D du ballast par essai uniaxial	135
6.5	Validation numérique	140
6.6	Conclusion	143
7	Massif 3D non-linéaire soumis à une charge mobile.	145
7.1	Introduction	145
7.2	Équations du problème	145
7.2.1	Équations d'équilibre dans le domaine mobile	145
7.2.2	Formulation faible et discrétisation	147
7.2.3	Résolution du problème non-linéaire statique.	148
7.3	Validation	149
7.3.1	Solution linéaire	149
7.3.2	Solution non-linéaire	150
7.4	Couplage d'une poutre et d'un demi-espace à deux couches	151
7.4.1	Maillage	151
7.4.2	Résultats et discussions	152
7.5	Conclusion	155
	Conclusions & Perspectives	157
	Annexes	159
	A Formule d'intégration adaptative de Filon	163
	B Charge statique sur un demi-espace élastique	165
B.1	Solution de Boussinesq	165
B.2	Pression uniforme sur une région circulaire	166
	C Matrices élémentaires	167

Introduction

Durant les années récentes, les transports ferroviaires et routiers, aussi bien pour les voyageurs que pour les marchandises, se sont beaucoup développés avec comme conséquence un trafic qui devient beaucoup plus rapide et plus sûr. Beaucoup de recherches ont été réalisées afin d'améliorer la vitesse des trains avec des voies qui sont dimensionnées pour pouvoir supporter des vitesses de véhicules qui sont de plus en plus élevées, surtout dans les pays développés : le TGV en France, le Shinkansen au Japon, l'ICE en Allemagne, l'X2000 en Suède, le Pendolino en Italie, le Thalys et l'EuroStar, etc. En France, le réseau de TGV de la SNCF permet des trains qui peuvent aller jusqu'à la vitesse de 300 km/h en régime commercial et de 500 km/h en essai.

Cependant, plus la vitesse des véhicules est élevée, plus le mouvement dynamique du rail et de l'infrastructure est important. La même observation peut être faite pour les voies routières. Les études théoriques et expérimentales montrent que la vibration induite par le trafic routier ou ferroviaire provoque des effets considérables sur le véhicule lui-même, sur la voie et l'infrastructure, et aussi, sur l'environnement dans la zone proche. La dynamique de structures soumises au mouvement des véhicules peuvent engendrer différents types de problèmes : le problème d'interaction dynamique véhicule-structure, le problème dynamique des voies et de l'infrastructure en interaction avec le sol, le problème de propagation d'ondes dû au passage des véhicules et ses influences sur les bâtiments, etc.

La motivation initiale de cette étude est de comprendre les phénomènes physiques de vibration apparaissant dans les voies en fonction de la vitesse des véhicules. Les mesures in situ montrent que, lorsque le véhicule circule avec une vitesse assez élevée, surtout sur les zones où le sol est souple, des dommages importants peuvent être engendrés dans la voie. La déformation de même que le tassement de la voie sont beaucoup plus importants en tenant compte de l'effet dynamique. Plus gravement pour les voies ferrées, sous certaines vitesses de passage des trains, les ondes se propageant dans la couche de ballast peuvent conduire à la ruine complète de la voie. Évidemment, dans ces cas, le comportement des structures ne reste plus dans la zone linéaire mais doit être non-linéaire. Ces non-linéarités, réciproquement, influencent le mécanisme de propagation d'ondes dans la structure et ne peuvent pas être négligées. Ceci est le deuxième élément qui motive cette étude.

Dans le cadre de cette thèse, le problème se ramène à considérer le comportement dynamique non-linéaire d'une structure de forme infinie dans une certaine direction soumise à des charges mobiles se déplaçant à une vitesse constante (ce qui peut représenter des voies routières ou ferroviaires soumises à des passages de véhicules)

Cette thèse est constituée de 3 parties :

La première partie se divise en deux chapitres et commence par une synthèse bibliographique dans le chapitre 1. On va présenter une description succincte de la structure des voies ferroviaires et des voies routières : leurs constituants et les aspects de modélisation. Ensuite, on va résumer les méthodes existantes et les phénomènes physiques aussi bien du problème dynamique général que du problème de charge mobile. Le chapitre 2 traite le cas tridimensionnel linéaire. Il présente une approche semi-analytique qui utilise un changement de variable puis une transformation de

Fourier pour résoudre le problème d'un demi-espace multicouche viscoélastique soumis à une charge ponctuelle mobile appliquée à sa surface libre. Même si les résultats obtenus par la méthode semi-analytique ne sont valables que pour les problèmes linéaires, cette approche permet d'évaluer rapidement et de donner des premières estimations de la réponse dynamique dans les couches du milieu en fonction de la vitesse et de la fréquence de la charge.

La deuxième partie a pour but d'étudier le problème dynamique non-linéaire soumis à une charge mobile par des modèles unidimensionnels. Elle se compose de trois chapitres. Le chapitre 3 considère le cas d'une barre posée sur un système uniforme de ressorts-amortisseurs soumis à une charge uniaxiale mobile dont l'amplitude est constante. Les ressorts ont des comportements de type unilatéral. Les solutions analytiques du problème linéaire et nonlinéaire sont explicitées pour tous les cas de vitesse. Des remarques sont faites sur la différence de physique de la propagation d'ondes uniaxiales dans les barres linéaires et non-linéaires. On va présenter aussi deux approches numériques utilisant des éléments finis afin d'obtenir la solution dans le régime permanent. Une première approche est le calcul dynamique transitoire dans le repère fixe et l'autre est le calcul statique dans le repère mobile qui demande un volume de calcul plus petit. Les deux approches seront validées grâce aux solutions analytiques présentées. A partir de ces démarches, on va écrire, dans le chapitre 4, la méthode de calcul dans le repère mobile du problème de couplage entre le rail et un système non-linéaire de masses-ressorts-amortisseurs. La méthode proposée dans le chapitre 3 pour le cas uniaxial est adaptée pour l'équation d'une poutre et est aussi étendue pour une charge dont l'amplitude est variable en fonction du temps. Une technique pour introduire la condition aux limites à l'infini sera aussi proposée en utilisant une couche absorbante. Après validation de la méthode proposée, le chapitre 5 présente une étude sur un modèle simplifié 1D de voies ferrées où la non-linéarité est introduite dans la couche de ballast. On considérera dans ce chapitre les influences de la vitesse et de la fréquence de la charge, et aussi les influences du comportement de la structure (la rigidité, la non-linéarité, la périodicité, etc) sur la réponse dynamique du système.

La troisième partie aborde le problème tridimensionnel non-linéaire soumis à une charge mobile. On se concentre dans cette partie sur la non-linéarité de la couche de ballast. Cette partie se compose de deux chapitres. Le chapitre 6 proposera une fonction continue pour la loi de comportement du ballast qui permet de décrire le mécanisme de non-résistance en tension de ce type de matériau granulaire. Ensuite, on va présenter dans ce chapitre une procédure expérimentale pour identifier le comportement en compression du ballast par un essai simple de traction-compression. Le chapitre 7 traite le cas d'un massif 3D non-linéaire dans le repère mobile où la couche de ballast utilise la loi de comportement proposée dans le chapitre précédent.

Finalement, on conclut sur les résultats obtenus et on propose de futures études possibles à partir de ces démarches.

Première partie

Introduction aux problèmes de charges mobiles

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

1.1 Introduction.

Ce chapitre présente une synthèse bibliographique du problème dynamique des structures infinies soumises à des charges mobiles. On va d'abord présenter une introduction générale sur les deux applications auxquelles on s'intéresse : les voies ferrées et les routes. On décrira leurs constitutions et leurs rôles, ainsi que les modèles utilisés pour le dimensionnement. Puis, on va rappeler quelques notions importantes sur la dynamique des structures (le système d'équations d'équilibre dynamique, la définition des types d'ondes ...) et sur les charges mobiles qui nous serviront après. Ensuite, les méthodes de résolution, (semi)-analytique et numérique, et les résultats existants sur le problème dynamique des charges mobiles seront présentés. Finalement, une synthèse complémentaire sur la modélisation du comportement dynamique des milieux granulaires sera aussi donnée.

1.2 Les deux applications.

1.2.1 Voies ferroviaires.

1.2.1.1 Description de la structure des voies ferrées.

Efforts exercés sur la voie. La voie supporte une charge statique due au poids propre appliqué sur l'essieu et une surcharge dynamique due à l'interaction dynamique entre le rail et le véhicule.

La charge statique sur un essieu est indiquée en fonction de la catégorie de voie qui est définie par l'U.I.C.¹ : A : 16 tonnes par essieu, B : 18 tonnes par essieu, C : 20 tonnes par essieu.

En interaction avec les véhicules, la voie supporte des surcharges verticales, transversales et longitudinales. Les efforts longitudinaux dus essentiellement aux accélérations et aux freinages sont peu importants (ils peuvent cependant poser éventuellement des problèmes sur certains ouvrages d'art). Les efforts verticaux et latéraux sont plus importants et causent des effets différents. La surcharge verticale est due à l'imperfection de la surface du rail et aussi à la vibration de la structure de véhicule en passant sur les traverses. Elle dépend fortement de la vitesse du train (elle peut atteindre 0.5 fois la charge statique). Les mesures montrent que les surcharges dynamiques sont des signaux aléatoires dont la dispersion croît avec la vitesse et qui dépendent de l'état du rail et aussi du véhicule. Par ailleurs, en analysant des spectres d'accélérations, trois bandes de fréquences peuvent être distinguées comme indiqué dans [6] :

- De 0 Hz à 20 Hz : cette bande de fréquence correspond à l'oscillation des masses suspendues du véhicule.

¹U.I.C. : Union Internationale de Chemin de Fer.

- De 20 Hz à 125 Hz : cela correspond à l'oscillation des masses non-suspendues du véhicule et des masses liées à la voie sur le support élastique de la voie.
- De 200 Hz à 2000 Hz : cela correspond aux vibrations propres des liaisons élastiques intermédiaires de la voie.

Les efforts latéraux sont moins importants, mais en même temps, la structure de ballast est beaucoup moins rigide dans la direction latérale. Ces efforts peuvent être causés par les phénomènes suivants :

- *le mouvement de lacet dans la voie* : dans la position statique du rail, chaque roue repose sur le sommet du rail. De part et d'autre de cette position médiane, dans un mouvement de lacet, l'essieu peut occuper diverses positions limitées par le jeu provenant des tolérances de construction et d'entretien de l'essieu et de la voie.
- *le mouvement en courbe* : quand le train circule sur les rails en courbe avec une certaine vitesse, une force centrifuge apparaît et s'applique au véhicule. Cette force centrifuge provoque des efforts latéraux sur la voie.

Constituants de la voie ferrée.

- **Le rail.** Le rail est le premier élément en contact entre le véhicule et la voie. Il se charge de transmettre et de répartir les forces du véhicule sur plusieurs traverses. Les caractéristiques du rail sont données par la géométrie du profil et le type de matériau. Le profil de la section est conçu pour avoir une bonne répartition des contraintes dans le rail. Pour les voies ferrées modernes, le rail à double champignon est le plus utilisé. La figure 1.1 présente un exemple d'une section de rail standard U.I.C. (dont le poids est de 60 kg/m). Le champignon assure le contact roue-rail. L'épaisseur de l'âme doit tenir compte des efforts tranchants et aussi des sollicitations au voisinage des trous d'éclissage. La largeur du patin décide la rigidité du rail dans le plan horizontal et détermine le taux de compression sur la traverse. D'autre part, l'acier du rail doit avoir les qualités pour assurer la résistance à l'abrasion, l'absence de fragilité, la soudabilité en vue de la confection de barres de grandes longueurs et avoir un prix acceptable.
- **Les traverses.** La transmission des efforts entre le rail et le ballast se fait par des traverses qui jouent un triple rôle :
 - transmission des charges du rail au ballast,
 - maintien de l'écartement des deux files de rails,
 - maintien de l'inclinaison au $1/20$ du rail.

Mécaniquement, les traverses sont soumises aux charges transmises par le rail, en général excentrées du fait des efforts latéraux exercés par les véhicules sur la voie et de la réaction du ballast qui dépend beaucoup des conditions d'appui des traverses.

Actuellement, les traverses en béton armé sont les plus utilisées (par rapport à celles en bois et en acier). La figure 1.1 présente une traverse qui mesure 2.415 m de long et pèse 245 kg . Elle est constituée de 2 blochets liés par une entretoise d'acier.

Afin d'amortir la charge dynamique transmise par le rail, une semelle en élastomère (9 mm d'épaisseur) est mise entre le rail et la traverse. Le rail est fixé sur la traverse en béton par des attaches NABLA RNTN. Les traverses sont mises chaque 0.6 m sur la voie.

- **Les couches d'assise.** Elles comprennent la couche de ballast, la sous-couche et la plate-forme (figure 1.2). Le dimensionnement des couches d'assise doit assurer la résistance à la fatigue du sol et doit mettre "hors gel" les sols sensibles.
 - *Couche de ballast.* Le ballast est un granulat de $25/50\text{ mm}$. La couche de ballast a une épaisseur de 25 à 30 cm avec le rôle de :
 - répartir sur la plate-forme les charges concentrées qu'elle reçoit des traverses.
 - amortir une partie très importante de la vibration grâce à ses propriétés rhéologiques.
 - assurer, en raison de sa granulométrie, le drainage rapide de la voie.

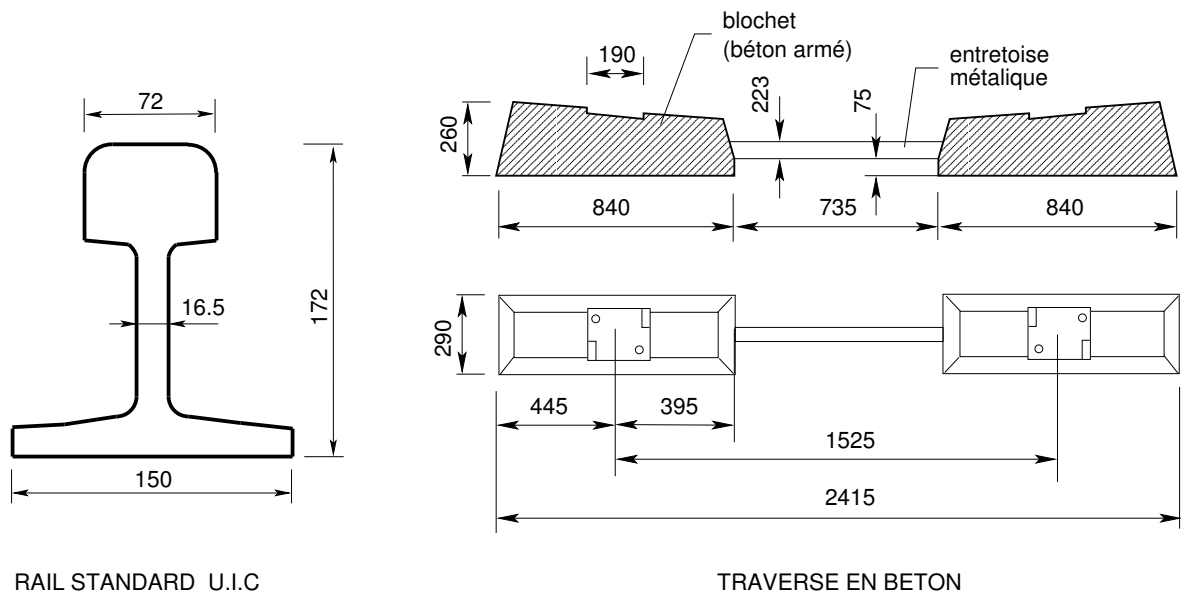


FIGURE 1.1. Section du rail et traverse (d'après Alias [6]).

- permettre de rectifier rapidement le nivellement au moyen du bourrage-dressage mécanisé. Les critères de qualité du ballast portent sur la granulométrie, la dureté, la forme et la propreté.
- *La sous-couche.* Elle comprend, du haut vers le bas, une couche sous-ballast (en grave graduée 0/315 mm), une couche de fondation (en grave compactée à 100% OPN mais cela n'est pas nécessaire pour les meilleurs sols) et, s'il y a lieu une couche anticontaminante (en sable propre et éventuellement complétée par une feuille géotextile).
- *La plate-forme.* La plate-forme dont la partie supérieure est compactée en couche de forme, et qui est également inclinée transversalement.

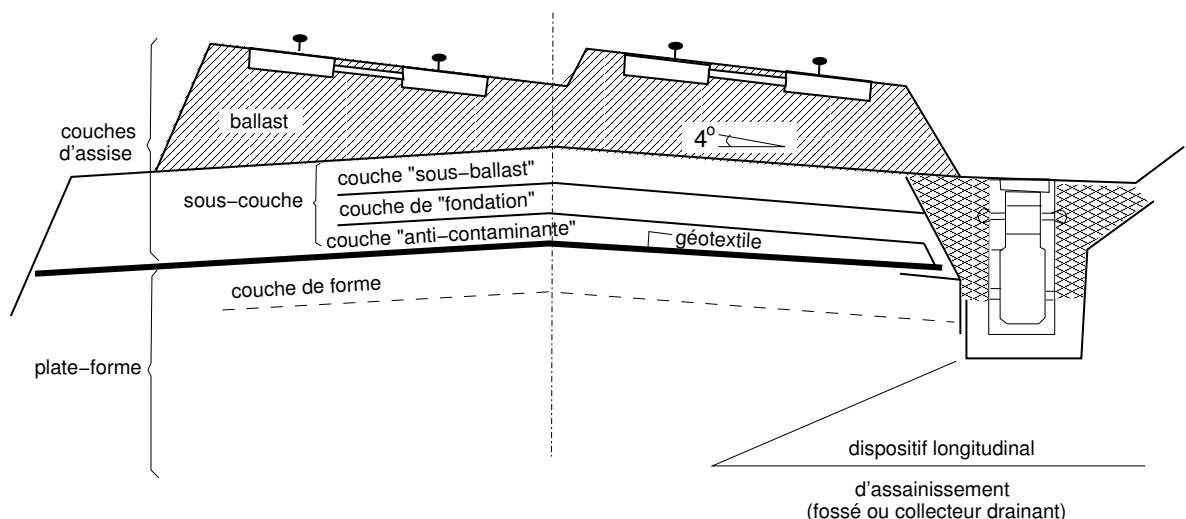


FIGURE 1.2. Profil en travers schématique des couches d'assise d'une voie en courbe mises en oeuvre sur ligne nouvelle dans le cas d'une plate-forme argileuse (la sous-couche se présente alors sous forme d'un multicouche)(d'après Alias [6]).

1.2.1.2 Modélisation des voies ferrées.

La recherche en mécanique des voies ferrées est toujours réalisée avec deux approches parallèles : l'expérience et la simulation. Pour la simulation numérique, la première tâche est de modéliser la structure et aussi l'excitation. Selon le problème auquel on s'intéresse, les composantes seront modélisées de façon plus ou moins détaillées, couplées avec les autres ou considérées indépendantes. On va présenter brièvement ci-dessous les modèles qui sont souvent utilisés dans le dimensionnement des voies ferrées. Un résumé de ces possibilités est montré dans la figure 1.3.

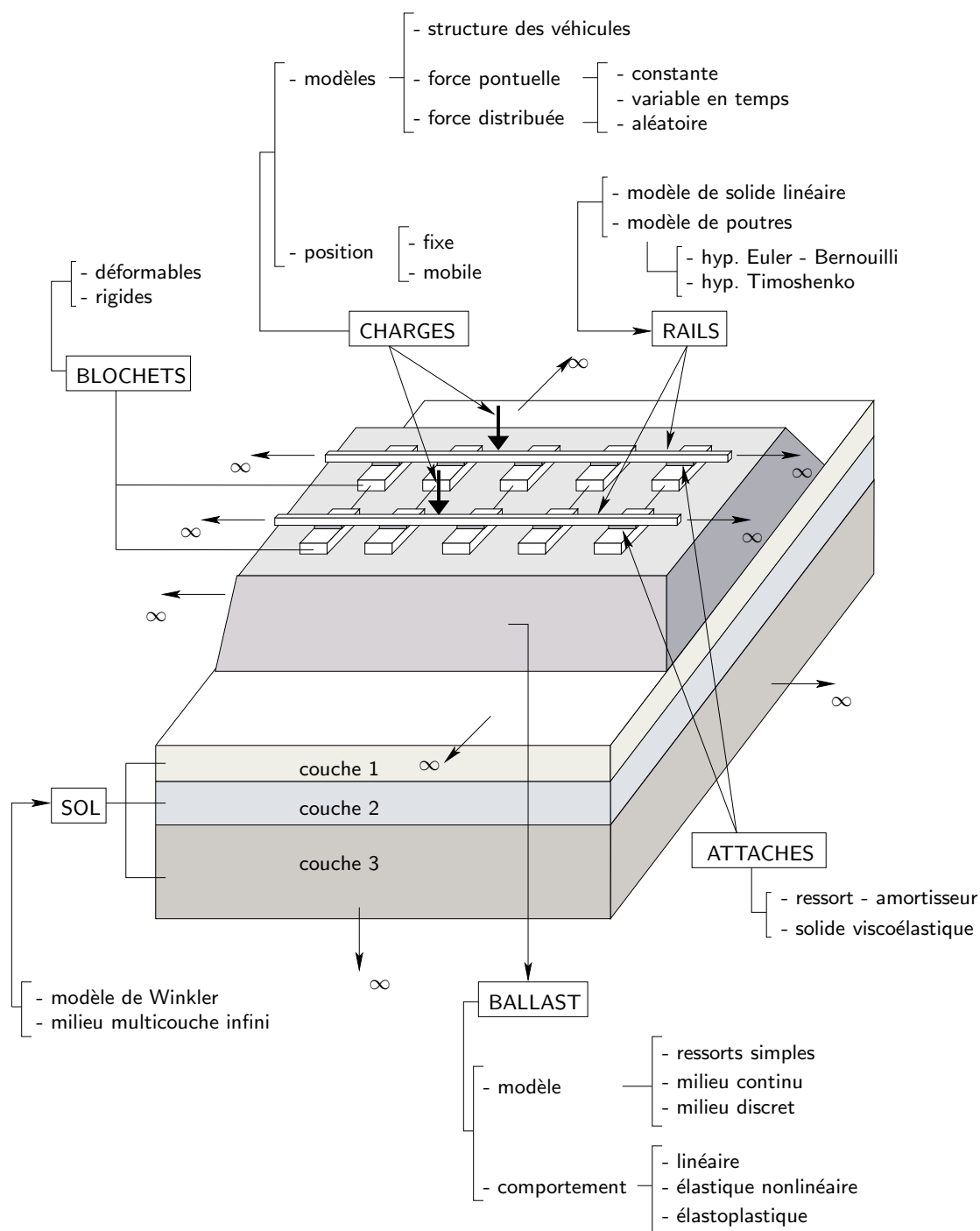


FIGURE 1.3. Modélisation des voies ferrées.

Modélisation des véhicules. Dans la littérature, la structure des véhicules est souvent modélisée par un système multi-essieu complexe de masses-ressorts-amortisseurs. Par exemple, on peut trouver dans [46] la structure d'une voiture de train (qui est constituée par la caisse, la suspension primaire et secondaire, le boggie, les essieux). Dans ce modèle, la caisse et le boggie sont considérés comme des corps rigides. Ce modèle est utilisé pour déterminer la surcharge dynamique sur la voie, voir [6] [46]. Dans une étude plus détaillée, on utilise des calculs dynamiques du problème d'interaction entre le véhicule et la voie [63] dans lequel la surface irrégulière du rail peut être introduite [39][96].

Le calcul des structures de voies peut se simplifier en considérant le véhicule comme une charge ou un groupe de charges. Les hypothèses sur les charges sont variées et dépendent du niveau de complexité du problème posé : elles peuvent être fixes ou mobiles, l'amplitude peut être constante, harmonique, variable en fonction du temps, aléatoire, etc.

Modélisation des structures. On ne présente ici que les modèles qui concernent la modélisation globale des voies ferrées.

- *Les rails.* Le modèle le plus simple (et aussi le plus utilisé) est la poutre d'Euler-Bernouilli [6][39], etc. L'hypothèse de Timoshenko est aussi utilisée pour tenir compte plus précisément de l'influence du cisaillement [47][21], etc.
- *Les semelles.* Elles ne sont pas toujours prises en compte dans les calculs. Si on doit en tenir compte, elles peuvent être considérées comme un ressort-amortisseur [6] [101, 100].
- *Les traverses.* Elles sont assez rigides par rapport aux autres composantes. Elles peuvent être une masse ponctuelle dans un calcul 1D ou un corps rigide de 3 ou 6 ddl selon les cas 2D ou 3D. Dans le cas 3D, les traverses de 2 blochets sont liées par une poutre qui représente les entretoises [16].
- *Le ballast.* C'est un point très difficile dans la modélisation des voies ferrées à cause de ses propriétés discrètes. Pour un modèle 1D plus simple, il peut être modélisé par un système continu de ressorts dont la masse est uniforme [101, 100]. Les problèmes en 2D ou en 3D proposent des modèles soit continus (élastique [12][16] ou non-linéaire [8],[37]...) soit discrets [103, 104], etc. Une discussion plus détaillée sur le ballast sera présentée plus loin dans la section 1.5.
- *La plate-forme et le sol.* Les modèles 1D considèrent l'infrastructure comme un système de ressorts, dit la fondation de Winkler. Dans les calculs en 2D ou 3D, ils sont souvent modélisés par un milieu multicouche infini. Le comportement du sol peut être linéaire ou non-linéaire en fonction du type de matériaux (Tresca, Coulomb-Drücker ...)

Le modèle global de calcul est une combinaison des différentes composantes et il existe plusieurs façons possibles de modéliser la voie ferrée, de la plus simple à la plus complexe.

Quelques études existantes. On peut citer ici quelques modèles existants pour le dimensionnement des voies ferrées. Balsan [12] a réalisé une analyse en 3D par éléments finis du comportement de la structure d'assise dans les essais de Vienn-Asernal et de Derby. Sauvage [99] et ensuite Profillidis [94] ont développé en utilisant le code *Rosalie* du LCPC des modèles assez complexes (rail, traverses, blochets, semelles) pour étudier le comportement des voies soumises à des efforts verticaux et statiques. La loi de plasticité de Coulomb-Drücker a été utilisée pour la couche d'assise (dont les paramètres de critère de plasticité sont déterminés par des essais triaxiaux). Un autre modèle, appelé *modèle RB3D* a été développé par le CERAM (Alaoui et Naciri (1995) [4], Guérin [46]). Il permet d'évaluer les évolutions des défauts de voie à partir de la charge des essieux (avec la surcharge dynamique dépendante de la vitesse), de la nature du sol et de la loi de tassement du ballast. Récemment, Bodin a étendu ce modèle pour obtenir le *modèle RB3L* qui permet de considérer aussi l'influence des efforts latéraux [16][17].

Il n'existe encore que très peu d'études dynamiques pour le dimensionnement des voies ballastées. Aubry *et al.* [8] ont calculé en utilisant le logiciel MISS3D (qui est développé à l'Ecole Centrale de Paris) une structure de voie où la couche de ballast est considérée comme un matériau élasto-plastique. Le couplage des éléments finis-éléments de frontières a été utilisé. Les tassements résiduels sont comparés dans deux cas de comportement : élastique et élastoplastique.

1.2.2 Voies routières

1.2.2.1 Modèle de dimensionnement des chaussées

Les sols en place étant incapables de supporter les charges induites par le trafic, la chaussée a pour rôle de diminuer, grâce à l'apport de couches de matériaux, les contraintes sur le sol-support. Une chaussée est donc constituée d'un empilement de couches qui a deux composantes principales : *le corps de chaussée* et *la couche de roulement*.

- *Le corps de chaussée*. Il est appelé aussi *couches d'assises* et permet de répartir les charges induites par les véhicules afin d'obtenir des contraintes acceptables pour le sol-support. Il est constitué de deux sous-couches, appelées *couche de base* et *couche de fondation*.
- *la couche de roulement*. Son rôle est de protéger les assises des infiltrations d'eau et de l'agressivité du trafic.

Deux couches supplémentaires peuvent éventuellement être ajoutées pour remédier à des problèmes spécifiques : *la couche de liaison* qui assure un collage entre la couche de roulement et le corps de chaussée et *la couche de forme* qui reprend les hétérogénéités trop importantes du sol-support [3].

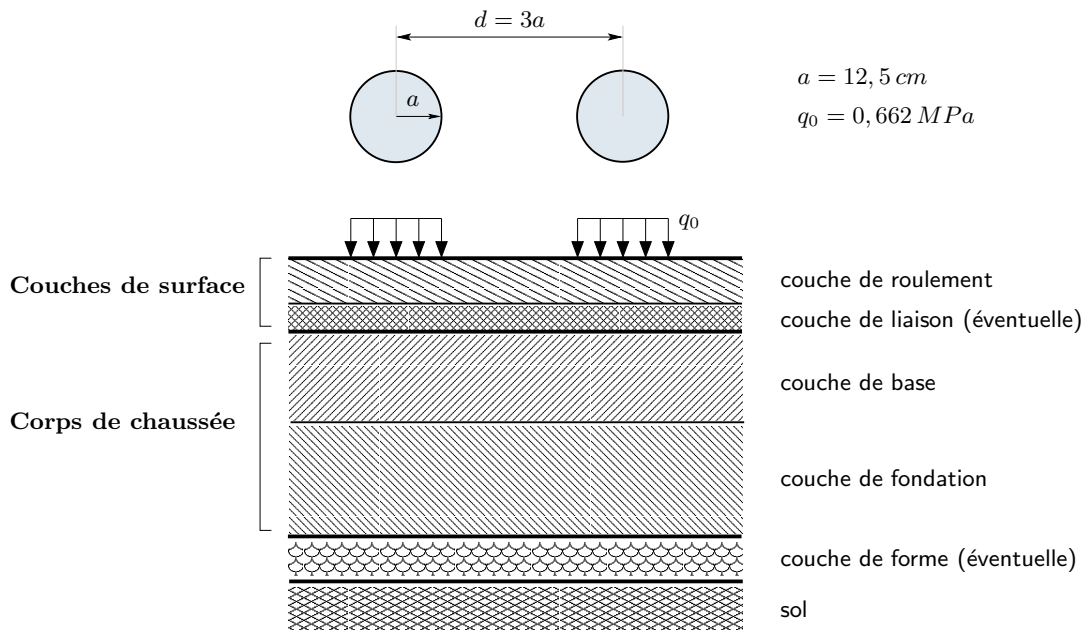


FIGURE 1.4. Schématisation de la structure et de la charge.

Jusqu'à maintenant, le calcul d'un dimensionnement de chaussées s'effectuait sur un modèle de chaussées qui est constitué d'une succession de couches, comme représenté sur la figure 1.4. La charge appliquée correspond à celle d'un demi-essieu standard français de 13 tonnes à roues jumelées. L'aire d'application des roues est considérée comme constituée de deux charges circulaires

de rayon $a = 12.5 \text{ cm}$ avec une distance entre elles $d = 3a$. La pression est uniformément répartie avec la valeur $q_0 = 0.662 \text{ MPa}$ [13].

1.2.2.2 Méthode de calcul des chaussées - ALIZE

Au LCPC, le calcul des contraintes et des déformations dans cette structure est effectué par ALIZE, qui est un programme de dimensionnement des chaussées. Ce programme permet de donner les champs statiques de déplacement et de contraintes dans la structure soumise à une ou à un groupe de charges circulaires appliquées sur la surface libre. Il est basé sur le modèle de Burmister (1943) dans lequel les couches sont supposées infinies et planes; la charge est circulaire et le problème se traite par conséquent en coordonnées cylindriques grâce à la symétrie. Brièvement, la résolution s'effectue de la façon suivante : dans chaque couche, le déplacement et les contraintes sont représentés par les dérivées de la fonction potentielle, ensuite, en utilisant la transformation de Hankel, il apparaît une équation différentielle d'une seule variable dans la direction verticale dont on peut présenter la solution générale avec 4 coefficients inconnus. Ces 4 inconnues seront trouvées à partir des conditions de continuité entre les couches à la frontière. Finalement, la transformation inverse est calculée numériquement par la méthode de quadrature de Gauss pour obtenir la solution.

1.2.3 Sur la vibration induite par le trafic.

Les vibrations induites par les mouvements des véhicules routiers ou ferroviaires sont des effets très significatifs sur l'environnement, le sol, les ouvrages dans la zone voisine, et aussi sur la stabilité des véhicules et des structures eux-mêmes. Les études de vibration induites par le trafic se divisent en deux problèmes principaux : *problème d'émission directe de bruit* (bruit de roulement) et *problème de propagation d'ondes dans la structure*.

- **Emission directe de bruit.** Le premier s'intéresse à la radiation du bruit émis directement à partir de l'interaction entre les roues des véhicules et le rail. Le but est de prédire et de donner des indications sur la réduction du bruit. Beaucoup de recherches dans ce domaine sont réalisées sur le logiciel TWINS (*Track-Wheel Interaction Noise Software*) qui est développé par l'European Rail Research Institute (ERRI) [45][55].
- **Propagation d'ondes dans la structure.** Le deuxième s'intéresse aux ondes qui ne sont pas émises directement dans l'air comme le bruit mais qui se propagent dans les infrastructures et le sol au-dessous. Le but est d'évaluer la réponse dynamique des véhicules - structures et de prédire les critères de ruine dans le dimensionnement des voies ferrées ou des chaussées.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons au deuxième problème.

1.3 Rappel sur les problèmes de dynamique des structures

1.3.1 Problème dynamique général dans un milieu continu

On considère le problème dynamique d'un domaine Ω dont la frontière est $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$ (figure 1.5). Le problème dynamique en petite perturbation s'écrit sur le domaine Ω dans un intervalle de temps $[0, T]$ et peut être représenté par :

- *Equation d'équilibre dynamique.*

$$\text{Div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\epsilon}) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

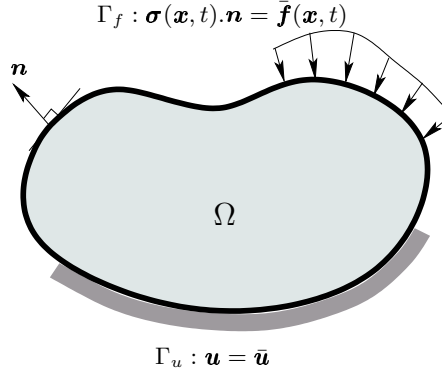


FIGURE 1.5.

- *Conditions initiales*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.5)$$

- *Conditions aux limites*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] \quad (1.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_f \times [0, T] \quad (1.7)$$

Dans ces équations, on désigne par “ $\dot{\mathbf{u}}$ ” et “ $\ddot{\mathbf{u}}$ ” les dérivées de \mathbf{u} en temps t au premier et au deuxième ordre (la vitesse et l’accélération). \mathbf{u} est le vecteur déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ sont respectivement le tenseur des contraintes et des déformations. \mathbb{C} est un tenseur d’ordre 4, représentant la loi de comportement, qui est une fonction de la déformation $\boldsymbol{\epsilon}$ dans un problème non-linéaire. Le terme scalaire ρ désigne la densité. Les vecteurs \mathbf{g} , $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ représentent la force volumique, la force extérieure et le déplacement imposé, respectivement. \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface.

1.3.2 Problème élastodynamique pour le milieu infini

Pour un domaine élastique isotrope, la loi de comportement s’écrit : $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$, où les coefficients λ et μ sont les deux constantes de Lamé du matériau élastique, et sont reliés au module d’Young E et au coefficient de Poisson ν par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.8)$$

Le problème dynamique présenté au dessus dans ce cas élastique peut se représenter par l’équation de Navier [2, 38] comme suit :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \rho \ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1.9)$$

où ∇^2 désigne l’opérateur Laplacien : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ et “ $\nabla \cdot$ ” est la notation de l’opérateur de divergence : $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$.

Ondes volumiques. En absence de condition aux limites, la solution générale des champs de déplacement \mathbf{u} de l'équation de Navier peut être décomposée dans les deux types d'ondes de natures différentes suivantes :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla \phi(\mathbf{x}, t)}_{\text{onde de compression}} + \underbrace{\nabla \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}_{\text{onde de cisaillement}} \quad (1.10)$$

où les fonctions $\phi(\mathbf{x}, t)$ (scalaire) et $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ (vectorielle) sont appelées les deux potentiels de Lamé et vérifient les équations des ondes :

$$c_p^2 \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.11)$$

$$c_s^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.12)$$

Cela montre deux mécanismes indépendants de propagation d'onde à deux vitesses finies :

- **onde de compression** (appelée aussi onde de dilatation ou onde irrotationnelle) associée au mouvement des particules qui s'effectue parallèlement à la direction de propagation de l'onde et à la vitesse c_p . Cette propagation est due aux efforts de traction-compression induits par l'éloignement ou le rapprochement relatif des faces perpendiculaires au mouvement et est notée l'onde P.
- **onde de cisaillement** (appelée aussi onde de distorsion ou onde équivolumique) associée au mouvement des particules qui s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde et à la vitesse c_s . Ces ondes se propagent plus lentement, sous l'effet des efforts de cisaillement induits par le glissement relatif des faces perpendiculaires au mouvement. Ses deux composantes dans ce plan sont notées l'onde SV et l'onde SH.

Notons que le rapport entre c_p et c_s ne dépend que du coefficient de Poisson : $c_s = c_p \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}}$ ce qui montre qu'on a toujours $c_s < c_p$ car $\nu > 0$.

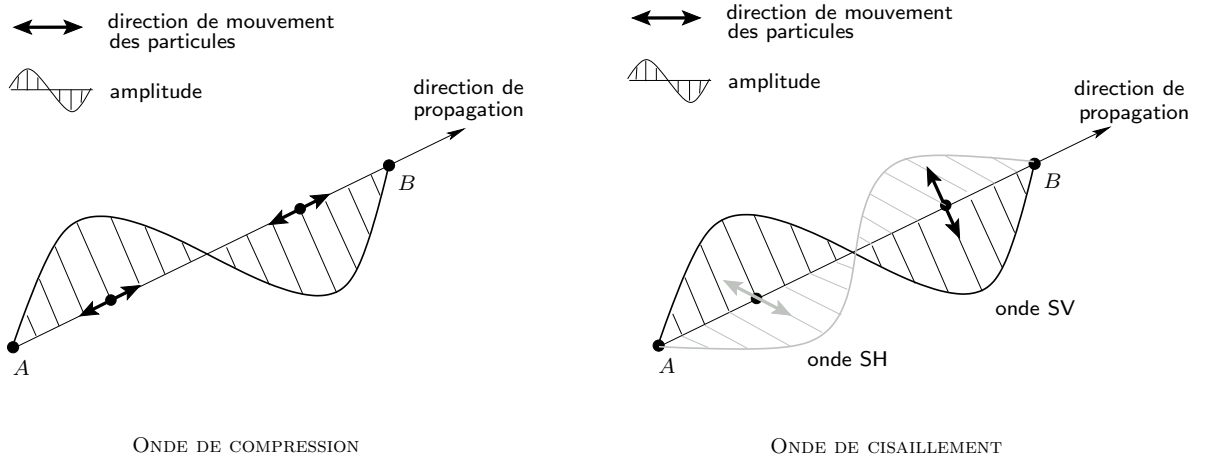


FIGURE 1.6. Ondes de compression et ondes de cisaillement

Onde de surface. La présence d'une surface libre perturbe les ondes simples de départ par l'apparition de phénomènes de réflexion et de réfraction. Sur la surface libre d'un demi-espace infini, il apparaît un troisième type d'onde dont l'amplitude est maximum à la frontière et diminue exponentiellement avec la distance à surface libre. Celle-ci est appelée **l'onde de surface** ou *l'onde*

de Rayleigh ² car la perturbation est pratiquement confinée dans une couche mince adjacente à la surface. Dans le cas d'un demi-espace élastique, l'onde se propage à une vitesse $c_R < c_s$ qui est déterminée par la racine de l'équation de Rayleigh :

$$R(c_R) = [2 - (c_R^2/c_s^2)]^2 + 4[1 - (c_R^2/c_p^2)]^{1/2}[1 - (c_R^2/c_s^2)]^{1/2} = 0 \quad (1.13)$$

Le mouvement des particules pour ce type d'onde est de nature elliptique et rétrograde par rapport à la direction de propagation de l'onde.

Si la surface libre n'est pas parfaitement plane, il peut apparaître une autre onde de surface (dite l'onde G , d'après Le Tallec [71]) qui est guidée localement par la direction de la discontinuité. Elle se propage à une vitesse v_G qui est inférieure à c_R .

Les énergies de ces ondes de surface se concentrent localement sur la surface et en plus, se dispersent très lentement (notons aussi qu'en absence d'amortissement, les ondes volumiques s'atténuent à l'infini avec une décroissance de l'ordre de $1/r^2$ mais de l'ordre de $1/\sqrt{r}$ pour celle de Rayleigh, r est la distance entre la source et le point considéré). Les ondes de surface sont les causes principales des risques lors d'un séisme.

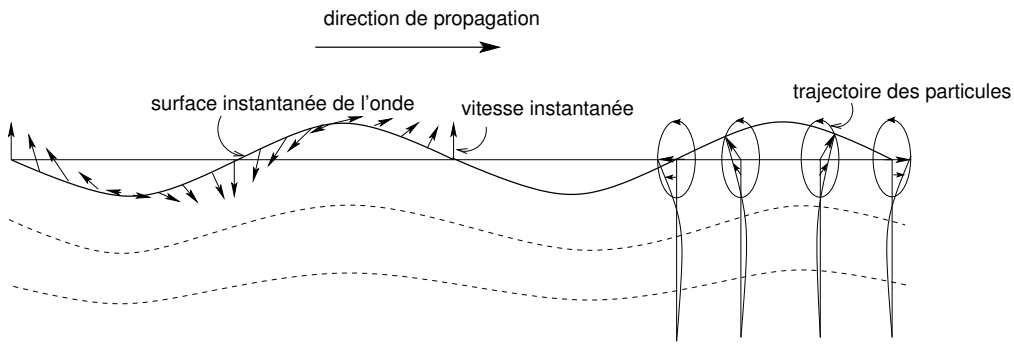


FIGURE 1.7. Onde de surface de Rayleigh (d'après Géradin [41])

Ondes dans un milieu stratifié. En réalité, le sol ne peut pas être modélisé par un massif semi-infini mais plutôt par un milieu stratifié (ou milieu multi-couche) qui est constitué de plusieurs couches. En présence d'une interface entre deux couches de propriétés physiques différentes, une onde incidente voit son type modifié ainsi que sa direction de propagation et son amplitude du fait des phénomènes de réfraction et réflexion. Pour le cas plus simple correspondant à deux demi-espaces en contact, quand une onde P rencontre l'interface, elle donne deux ondes P et SV réfléchies, et deux autres ondes P et SV réfractées ; une onde SH incidente ne donne que des ondes SH réfractées et réfléchies [2, 38].

La réponse dynamique complète d'un domaine élastique à plusieurs couches devient rapidement beaucoup plus difficile à déterminer. Le mouvement dans une couche est une superposition des ondes réfléchies et réfractées qui viennent des interfaces de discontinuité. En outre, des ondes de surface apparaissent aussi à chaque interface. Le calcul de la réponse dynamique se fait alors par intégration numérique ou par analyse en modes propres.

²Le problème de l'onde de surface d'un demi-espace élastique a été étudié par Rayleigh en 1885.

Condition de radiation. Dans le cas où le domaine considéré est infini, la condition de radiation du champ de déplacement d'un type d'onde (dont la vitesse est c) pour la frontière infinie s'écrit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.14)$$

où r est la distance entre la source et le point considéré, $s = 2, 3$ suivant que la dimension du problème est 2D ou 3D. Dans le domaine des fréquences, cette condition s'écrit [107] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\omega)}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{u}(\omega) \right) \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.15)$$

1.3.3 Problème de charge mobile

Notation. On s'intéresse au problème où la charge se déplace avec une vitesse constante v sur une ligne droite dans le domaine (ou sur sa surface libre). La charge est soit constante soit variable en fonction du temps (harmonique, par exemple). On peut définir la forme générale d'une charge mobile sur une ligne \mathbf{e} comme suit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0(t) \delta(\mathbf{x} - vt\mathbf{e}) \quad (1.16)$$

où $\mathbf{f}_0(t)$ est le vecteur d'amplitude qui ne dépend que du temps, δ est la fonction de Dirac.

Repère mobile. Dans les études des problèmes de charge mobile avec une vitesse constante, plusieurs auteurs (Frýba [39], Eringen et Suhubi [38], etc) préfèrent passer dans un repère mobile qui s'attache à la position de la force. Ce fait est réalisé par un changement de variable. Par exemple, si la charge se déplace suivant l'axe Ox avec la vitesse v , on a le changement de variable suivant :

$$x^* = x - vt; \quad y^* = y; \quad z^* = z \quad (1.17)$$

Le problème est réécrit dans ce nouveau repère avec les variables x^*, y^*, z^* . Dans certains cas, par exemple si la charge est constante ou harmonique, le problème se simplifie beaucoup dans le repère mobile.

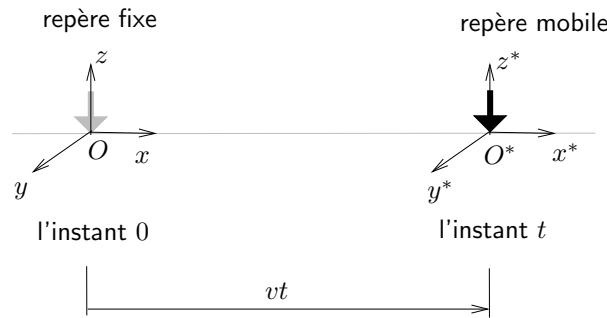


FIGURE 1.8. Repère fixe et repère mobile

Régimes d'une charge mobile. En analysant le problème de propagation d'ondes avec une source mobile, il est important de considérer le rapport entre la vitesse de la source v et celles des ondes du milieu. Le problème où la source est en mouvement a été considéré en premier pour les

phénomènes acoustiques. Dans un domaine élastique homogène, on introduit trois notions, dites *nombre de Mach*, qui représentent le rapport entre v et c_p , c_s et c_R :

$$M_p = \frac{v}{c_p} ; \quad M_s = \frac{v}{c_s} ; \quad M_R = \frac{v}{c_R} \quad (1.18)$$

Pour le problème élastodynamique d'un milieu massif, on peut distinguer trois régimes différents dépendant de ces nombres de Mach [38] :

- *Régime subsonique*. Quand $M_s < 1$: la vitesse de la source est inférieure de celle de l'onde S .
- *Régime transonique*. Quand $M_s > 1 > M_p$: la vitesse de la charge est entre celle de l'onde S et celle de l'onde P .
- *Régime supersonique*. Quand $M_p > 1$: la vitesse de la charge est supérieure celle de l'onde P .

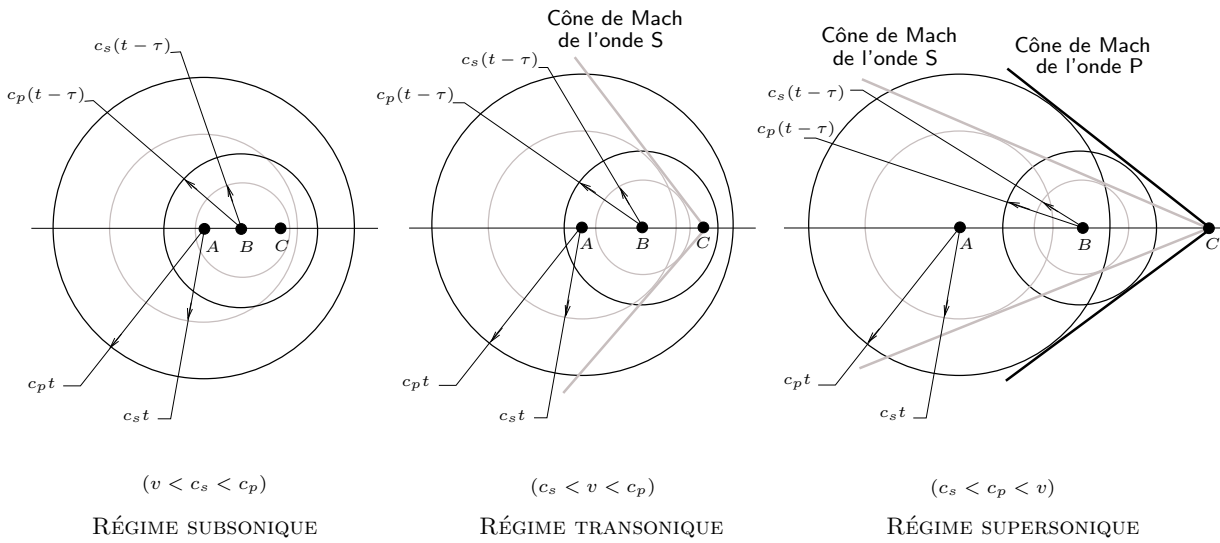


FIGURE 1.9. *Trois régimes d'une source mobile.*

La figure 1.9 présente une illustration de ces 3 régimes : sub-, trans- et super-sonique. Elle montre la propagation des ondes quand on regarde une source qui part de A à C en passant par B ($AB = v\tau < AC = vt$). Quand v dépasse c_s ou c_p , les surfaces de l'onde de choc, dites *les cônes de Mach*, apparaissent.

En outre, concernant l'onde de surface, il sera utile de comparer la vitesse de la charge vis à vis de la vitesse d'onde de Rayleigh. En considérant la valeur du nombre de Mach M_R , on peut distinguer 2 régimes différents :

- si $M_R < 1$: régime sub-Rayleigh.
- si $M_R > 1$: régime super-Rayleigh.

Equation élastodynamique dans le repère mobile. En considérant le problème dans le repère mobile, les équations élastodynamiques (1.11) deviennent :

$$(1 - M_p^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{2v}{c_p^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\phi} = 0 \quad (1.19)$$

$$(1 - M_s^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} + \frac{2v}{c_s^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\psi} = 0 \quad (1.20)$$

Il est souligné dans [38] que la nature de ces équations en fonction des variables d'espace change suivant les valeurs des nombres de Mach M : quand $M < 1$, on a une *équation elliptique* et quand $M > 1$, on a une *équation hyperbolique*.

Passage de subsonique à supersonique. Quand une charge passe du régime subsonique au régime supersonique (ce qui est appelé le passage sur *la barrière* d'onde élastique), la nature du champ d'ondes généré est en conséquence changé. Wolfert *et al.* [108] ont montré deux exemples de ce fait pour le cas d'un fil posé sur une fondation de Winkler. Le premier est quand on a un saut de vitesse de la charge ($v < c$ si $t < t_0$ et $v > c$ quand $t > t_0$) et l'autre est quand on a un saut de densité du milieu ($\rho = \rho_1$ si $x < x_0$ et $\rho = \rho_2$ si $x > x_0$) : la vitesse qui était subsonique devient supersonique dans le nouveau milieu. Les solutions analytiques montrent que les ondes au passage de la barrière d'onde sont beaucoup plus importantes par rapport à celles du régime permanent. En plus, la réponse dans le deuxième cas de passage est plus petite que dans le premier. Ce problème est aussi étudié par Gavrilov [40] en utilisant un calcul asymptotique.

1.4 Méthodes de résolution et résultats existants

1.4.1 Méthode semi-analytique

La méthode analytique (ou semi-analytique) s'adresse aux problèmes linéaires et de géométrie simple. Les équations élastodynamiques (Navier ou Helmholtz ou celles équivalentes pour les cas 1D) sont utilisées. L'idée générale est de transformer ces équations dans le domaine fréquentiel ou des nombres d'ondes dans lequel le problème se réduit à un système d'équations différentielles (qui peut être éventuellement algébrique dans le cas le plus simple) d'une seule variable. Le problème dans ce domaine se transforme en utilisant les conditions aux limites en un calcul numérique plus simple en 1D (ou éventuellement analytique). Les solutions en temps et/ou en espace sont obtenues en appliquant les transformations inverses.

Massif multicouches. Il s'agit de considérer la réponse dynamique d'un demi-espace soumis à une (ou un groupe de) charge mobile. Le milieu peut être multicouche élastique mais doit être homogène dans le plan horizontal. La charge peut être constante ou variable en fonction du temps.

Plus classiquement, la solution analytique du problème d'une source mobile constante dans un espace (ou un demi-espace) 3D infini en régime transitoire peut être trouvée dans plusieurs ouvrages (par exemple dans ceux de Eringen et Suhubi [38] ou de Frýba [39]). Le problème est transformé dans le domaine des fréquences et des nombres d'onde (une transformation quadruple a été utilisée). Les solutions obtenues montrent bien deux cônes de Mach correspondant aux ondes P et aux ondes S .

Dans le cas d'un demi-espace, le problème plus simple d'un massif homogène soumis à une ligne infinie de charges constantes (problème en 2D) a été premièrement abordé par Sneddon (1952) (uniquement pour le cas subsonique) et puis par Hole et Huth (1956) (pour tous les cas de vitesse). La solution analytique explicite due à une charge constante dans le régime permanent est trouvée en passant au repère mobile et en utilisant la méthode des fonctions complexes [38]. Le problème 3D en régime permanent a été étudié par Eason (1965) pour les vitesses subsoniques. Plus généralement, Frýba [39] a donné les solutions du problème dans les trois cas subsonique, transonique et supersonique sous une forme intégrale. Le problème transitoire a été considéré par Payton (1964) (en utilisant le théorème de Betti-Rayleigh), Gakenheimer et Miklowitz (1969) (en utilisant la technique de Carniard de Hoop). La solution explicite de ce problème à la surface libre

est donnée dans [38] à partir des solutions du problème de Lamb ³. Les calculs montrent que la première résonance apparaît quand la vitesse de la charge s'approche de la vitesse de l'onde de Rayleigh.

A partir de ces démarches, des méthodes de calcul semi-analytiques ont été développées dans lesquelles les transformations inverses sont réalisées numériquement. Celles-ci permettent de résoudre des problèmes plus compliqués, quand on ne peut pas avoir une forme analytique explicite des solutions dans le domaine fréquentiel, par exemple quand le domaine n'est plus homogène mais est multicouche. Pour évaluer la transformation de Fourier inverse, la technique de transformation de Fourier rapide (FFT) est beaucoup utilisée.

Dans [27][28], Barros et Luco ont présenté la méthode pour obtenir les déplacements et les contraintes en régime permanent dans un milieu multi-couche visco-élastique. La solution est obtenue par la transformation de Fourier inverse qui est calculée en utilisant la technique de FFT et l'intégration numérique adaptative de Filon. La solution est validée en comparant avec la solution analytique dans le cas 2D.

Une étude détaillée du modèle bidimensionnel (homogène ou multi-couche) est présentée dans la thèse de Leufeuve-Mesgouez [73]. L'adimensionnement des résultats par rapport à la longueur d'onde de Rayleigh a été présenté. En plus, un calcul analytique approché qui prend en compte uniquement l'onde de Rayleigh a été aussi proposé.

Le problème d'un demi-espace homogène soumis à une charge uniforme mobile distribuée sur un rectangulaire peut être trouvé dans les travaux de Jones *et al.* [60] (pour une charge constante), [58] (pour une charge harmonique). L'effet de plusieurs charges a été discuté dans [72] où les résultats de déplacement dus à un groupe de 9 charges rectangulaires posées à des distances différentes montrent l'existence d'interférences constructives ou destructives. Picoux et Le Houedec [92] ont étudié l'effet d'un effort latéral et vertical sur une charge harmonique et ont montré que cet effet n'est pas négligeable pour les déplacements latéraux.

Dans le cas d'un milieu multi-couche soumis à une force constante, la vitesse critique, qui était égale à la vitesse d'onde de Rayleigh (qui ne dépend que des paramètres physiques (E, ν)) dépend aussi des paramètres géométriques, i.e des épaisseurs des couches. On peut trouver dans [59], [73] les études sur la *couche critique* du problème d'une couche élastique posée sur un demi-espace rigide ou élastique. La vitesse critique due à une charge harmonique a été étudiée par Dietermann et Metrikine [31]. L'épaisseur critique de la couche élastique est aussi déterminée dans cette référence en fonction de la vitesse dans le cas où la fréquence de la charge est proportionnelle à sa vitesse (quand la vitesse du train est grande, la fréquence de la charge est notamment déterminée comme un rapport de la vitesse et de la distance entre les traverses). En général, quand la profondeur de la couche élastique augmente, la vitesse critique est diminuée.

Quand la vitesse de charge dépasse la vitesse critique, la solution dans le domaine fréquentiel-nombres d'ondes devient très singulière et celle-ci pose des difficultés pour évaluer les intégrations de la transformation inverse. Du point de vue analytique, on peut faire l'intégration dans le plan complexe où on doit spécifier les pôles, choisir les contours et calculer les résidus [38][39][73] ... En revanche, les points singuliers ne doivent pas apparaître dans une solution numérique. Plusieurs auteurs ont introduit une petite viscosité pour déplacer des points singuliers de l'axe d'intégration afin d'avoir une solution numérique finie. Néanmoins, la fonction à intégrer est très irrégulière dans ce cas et un nombre de points de calcul assez important est demandé pour évaluer précisément l'intégration [58]. La technique d'intégration numérique adaptative a été aussi utilisée [27][54]. Par ailleurs, la méthode de transformation par ondelettes qui permet d'utiliser un maillage d'intégration adaptatif en localisant les points singuliers est proposée par Grundmann *et al.* [44], Lieb et Sudret [75] ...

³Lamb (1904) a résolu le problème transitoire d'un demi-espace soumis à une force ponctuelle ou à une ligne de force à la surface libre : $f(t) = f_0\delta(x)\delta(t)$.

Dans les études qu'on a montrées, la transformation de Fourier est très souvent utilisée car la plupart étaient intéressées par le régime permanent du problème. Si on s'intéresse à la solution transitoire, la transformation de Laplace peut être utilisée. Cette méthode a été proposée par Gakenheinmer et Miklowitz (1969) et complétée par Bakker *et al.* [11] afin d'étudier le problème d'un demi-espace soumis à une force ponctuelle mobile.

Poutre infinie - fondation de Winkler. Ce système est le plus simple pour modéliser le rail couplé avec la fondation. Il était premièrement étudié par Timoshenko depuis l'année 1926. La méthode de résolution est toujours similaire à celle du cas d'un massif infini sauf qu'on doit résoudre une équation différentielle du quatrième ordre. Dans [39], Frýba présente en détail un calcul analytique du problème d'une force constante se déplaçant sur une poutre d'Euler-Bernoulli infinie sur la fondation de Winkler pour toutes les possibilités de vitesses et de valeurs de viscosité. Une vitesse critique à laquelle la résonance apparaît a été trouvée, elle dépend de la densité et de la rigidité en flexion de la poutre et aussi de la rigidité de la fondation. La vitesse critique augmente quand la rigidité de la fondation augmente.

L'hypothèse d'Euler-Bernoulli peut ne pas être suffisante dans certains cas. Chen et Huang [21] ont présenté un calcul semi-analytique pour tous les cas de vitesse pour une poutre de Timoshenko soumise à une force ponctuelle constante. Ils ont montré que quand la rigidité de la fondation devient importante (i.e l'effet de cisaillement dans la poutre est plus important), la vitesse critique calculé avec l'hypothèse d'Euler-Bernoulli est supérieure à celle de Timoshenko.

Si la charge est harmonique, les ondes qui sont dues à la vitesse et aussi à la fréquence de la charge peuvent se propager de différentes manières. Dans [7], Andersen *et al.* ont présenté une étude adimensionnelle pour des mécanismes différents de propagation d'ondes dépendant des valeurs relatives de vitesse et de fréquence de charge vis à vis de celles critiques.

Hardy [48] a présenté une méthode graphique pour identifier la phase et la vitesse de groupe d'onde en utilisant une intégration de convolution mobile. L'existence et le nombre des ondes propagatives dépendent fortement de la vitesse et de la fréquence de la charge.

La vibration d'une masse ponctuelle se déplaçant sur une poutre - fondation de Winkler en compression a été considérée dans [80]. Les auteurs montrent que pour une vitesse suffisamment grande de la masse, une instabilité de vibration apparaît dans la poutre. La vitesse critique est plus petite avec une plus grande masse ou avec une plus grande force axiale.

Couplage de poutre - massif infini. Dans une étude plus détaillée, le système de ressorts de Winkler ne peut plus représenter la fondation réelle. Il s'agit de poser un problème de couplage entre une poutre et un massif élastique en présence d'une charge mobile. Dieterman et Metrikine [33] ont calculé la rigidité équivalente d'un demi-espace en interaction avec une poutre d'Euler-Bernoulli. Les auteurs ont montré que la rigidité équivalente dépend fortement de la fréquence et du nombre d'onde de la poutre si la vitesse de phase est au voisinage de la vitesse de Rayleigh. Deux vitesses critiques sont aussi déterminées dans le cas d'une charge constante : une égale à la vitesse d'onde de Rayleigh et l'autre qui est un peu plus petite. Quand la vitesse de la charge est égale à la vitesse critique, la rigidité équivalente est zéro, c'est à dire qu'il n'y a pas d'ondes qui sont générées dans le milieu massif.

Les mêmes auteurs ont présenté dans [32] la réponse dynamique de ce problème avec une charge constante dans tous les cas de vitesses. Dans [83], la réponse d'une poutre en compression posée sur un demi-espace due à une charge latérale a été aussi considérée. La vitesse critique dans ce cas est déterminée en fonction de la force de compression axiale dans la poutre et on peut montrer qu'elle est toujours inférieure à celle avec la charge verticale.

Un modèle plus complexe d'une voie ferrée constituée d'une poutre (pour le rail), d'un système masse-ressorts-amortisseurs (pour les blochets, les semelles et le ballast) et d'un demi-espace multicouche a été étudié avec une charge constante ou harmonique par Sheng *et al.* [101][100]. Les effets de vitesse et de fréquence de charge, ainsi que du type d'infrastructure de voie sont présentés dans le travail de Jones *et al.* [57].

En comparant la réponse dynamique d'une charge mobile appliquée sur une poutre posée sur une fondation de Winkler et posée sur un demi-espace élastique 3D, Dinkel *et al.* [34] ont proposé une méthode pour déterminer des paramètres de Winkler qui peuvent représenter le domaine 3D. Une procédure d'optimisation numérique est aussi proposée pour minimiser l'erreur.

Dans [82], Metrikine et Vrouwenvelder ont considéré la vibration à la surface d'un milieu 2D générée par une charge mobile sur une poutre dans un tunnel. Le modèle 2D est utilisé avec trois types différents de charge : constante, harmonique et aléatoire stationnaire. Il est montré que la vitesse minimale de phase dans la poutre est inférieure à la vitesse d'onde de Rayleigh dans la couche et est plus grande avec une profondeur plus grande. Pour une charge déterministe, le déplacement à un point d'observation à la surface est analysé par le spectre d'amplitude de vibration à ce point. Pour une charge aléatoire, c'est la variance de la vibration qui est considérée.

Knothe et Wu [62] ont étudié le comportement dynamique d'une voie posée sur un demi-espace ou sur une fondation viscoélastique simple. Les traverses discrets sont tenues en compte. Ils ont observé que pour les fréquences inférieures à 250 Hz, il y a des grandes différences entre les résultats du modèle d'un demi-espace et du modèle de fondation visco-élastique. Au-delà de cette valeur, la différence est négligeable, le modèle simple visco-élastique peut être utilisé.

Poutres sur des appuis périodiques. Dans [14] [15], Belotserkovskiy a étudié la vibration due à une charge mobile harmonique posée sur des appuis élastiques périodiques. Des conditions spéciales sont imposées sur deux points quelconques qui sont séparés par une distance qui est égale à celle entre deux appuis. Ces conditions imposent que, dans le régime permanent, il est suffisant de considérer uniquement le problème dans une partie qui se trouve entre deux appuis.

En développant le problème présenté dans [33], Metrikine et Popp [81] ont déterminé la rigidité des ressorts équivalents qui peut être mis à chaque appui et qui permet de décrire exactement la réaction en régime permanent du demi-espace élastique. Cette rigidité (qui est une variable complexe) est calculée en fonction de la fréquence de vibration de la poutre et du déphasage de vibration de l'appui voisin. Le déphasage dépend de la fréquence et de la vitesse de la charge, et de la période d'appuis de la poutre. La vitesse critique (quand la rigidité est égale à zéro) est évaluée par des relations entre le déphasage et la fréquence de la poutre.

Krzyzynski *et al.* [70] ont étudié un problème dans lequel le rail est modélisé par une poutre de Timoshenko et les blochets sont considérés comme des corps rigides de 2 degrés de liberté. Le théorème de Floquet est utilisé.

Un problème de couplage de poutre, traverses discrètes et demi-espace soumis à une charge "super-rapide" a été considéré par Krylov [66, 67, 68, 69]. L'auteur s'est intéressé aux ondes de Rayleigh dues à la vitesse de charge. Il a montré que les ondes qui se propagent dans toutes les directions avec une charge subsonique sont enfermées dans un cône (dont l'angle est défini par $\theta = \arccos c_R/v$) si la vitesse dépasse la vitesse de l'onde de Rayleigh (régime trans-Rayleigh). La vibration dans le cas "trans-Rayleigh" est beaucoup plus grande que dans le cas subsonique. Il a remarqué aussi que les amplitudes de déplacement aux points se trouvant au bord du cône ne dépendent pas de la périodicité du problème.

1.4.2 Méthode des éléments finis - Condition aux limites absorbantes

Pour les structures dont les géométries sont plus complexes ou avec des matériaux non-linéaires, il faut utiliser les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis. En général, l'analyse par éléments finis de la propagation des ondes dans un domaine infini pose deux problèmes majeurs. Premièrement, la structure doit être discrétisée de façon telle que les ondes peuvent se propager. Deuxièmement, comme il est seulement possible de modéliser la structure dans une partie finie, des frontières artificielles doivent être introduites pour permettre de décrire l'influence des domaines extérieurs.

Le calcul des structures soumises aux charges mobiles par la méthode des éléments finis a attiré beaucoup de travaux depuis une dizaine d'années. Il y a deux points de vue qui sont le plus souvent utilisés :

- (i) calcul dans le repère fixe avec une source mobile
- (ii) calcul dans le repère mobile avec une source fixe.

Calcul dans le repère fixe. Habituellement, l'équation dynamique (et éventuellement non-linéaire) en éléments finis est établie en discrétisant la formulation variationnelle de Galerkin pour le système présenté dans le paragraphe 1.3.1. Ce fait nous donne un système d'équations différentielles en temps avec des conditions initiales :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.21)$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 ; \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_0 \quad (1.22)$$

la différence est que la position de la force dans ce cas change à chaque pas de temps. Les méthodes classiques comme la méthode de superposition modale ou les procédures d'intégration numérique (β -Newmark, Wilson- θ , α -HHT ...) peuvent être utilisées. La première n'est valable que pour les cas élastiques. Si la structure est non-linéaire, il faut utiliser la deuxième pour trouver la solution en régime permanent après le calcul transitoire. La difficulté de cette façon de calculer vient de deux raisons essentielles. D'abord, comme le régime stationnaire ne peut être atteint qu'après un certain temps de calcul, i.e. après une certaine distance de déplacement de la charge, la taille du maillage nécessaire doit être grande. Puis, la densité de maillage au voisinage de la charge (où la non-linéarité peut apparaître par exemple) doit se déplacer avec la charge, et donc, on a besoin d'une grande zone avec des éléments fins. En plus, les schémas d'intégration numérique demandent des pas de temps qui sont suffisamment petits pour assurer la stabilité.

En utilisant les éléments finis linéaires dans le calcul dynamique, on a besoin au moins de 4 éléments sur une longueur d'onde afin de pouvoir représenter le champ d'ondes. Cependant, pour une bonne description des ondes, le nombre d'éléments nécessaires est de l'ordre de 10 (voir par exemple [51][115]). Si des éléments avec une fonction d'interpolation d'ordre supérieur sont utilisés, le nombre d'éléments peut être réduit.

Dans ses études du problème de poutres finies soumises à une charge mobile, Rieker *et al.* [97] ont montré qu'on a besoin d'un nombre d'éléments pour le problème de charge mobile qui est de 2 à 8 fois plus que dans un problème statique. Le vecteur force équivalent pour un élément qui a une charge mobile à l'intérieur dépend beaucoup de la fonction d'interpolation. Les problèmes 1D finis (structures de poutres simples ou multi-travées couplées avec un système qui modélise les véhicules) peuvent se trouver dans plusieurs études différentes. On peut citer par exemple les travaux de Delgado [30], de Henchi *et al.* [49], de Olsson [87], de Wu *et al.* [109], de Zibdeh *et al.* [114], etc.

Dans les années récentes, avec l'avancée des capacités des ordinateurs qui permettent de calculer des modèles avec de gros maillages, les problèmes en 3D peuvent être abordés. Dans ces modèles,

la structure détaillée de la voie : rail, blochet, semelles et aussi de la structure d'assises : ballast, sol avec la non-linéarité peuvent être pris en compte.

Dans [36], Ekevid *et al.* ont réalisé des calculs transitoires en 2D non-linéaire par éléments finis en utilisant une technique de temps-espace adaptative qui est basée sur la procédure de Galerkin discontinue (Discontinuous Galerkin⁴). Les pas de temps et le maillage sont redéfinis à chaque instant de calcul à partir d'une estimation d'erreur. Le cas où on est en régime supersonique a été aussi traité. Un autre calcul 3D de la structure de voie ferrée en non-linéaire (de comportement élasto-plastique) est présenté par les mêmes auteurs dans [37]. Les éléments finis couplés avec des éléments aux frontières (Scaled Finite Element) sont utilisés. Cependant, ces calculs demandent des ordinateurs très puissants et des temps de calcul énormes.

On peut aussi trouver dans [90] un calcul dynamique transitoire d'un couplage nonlinéaire de chaussée - sol proposé par Pan *et al.*. Une modélisation mixte des éléments finis (pour la chaussée) - éléments frontières (pour le sol) a été utilisée. Un concept intéressant appelé "pass-over" a été proposé par les auteurs pour s'adapter au problème de charge mobile : le champ de déplacement et de contrainte se déplace avec la position de la charge après chaque pas de temps. Les solutions obtenues dans le pas de temps précédent sont utilisées comme les valeurs initiales pour le pas de temps actuel.

Par ailleurs, en supposant que le domaine considéré est homogène dans la direction du mouvement de la charge, un modèle appelé *modèle 2.5D* a été proposé. Dans ce modèle, une transformation est réalisée dans la direction du mouvement et le domaine du plan dans les deux autres directions est discrétisé par éléments finis. On peut citer par exemple le travail de Yang et Hung [110] où les auteurs ont validé ce modèle dans tous les cas subsonique, transonique et supersonique.

Un modèle plus compliqué de couplage linéaire entre des véhicules, les infra-structures et le sol infini a été utilisé par Clouteau *et al.* [23] en utilisant la technique de sous-structuration et des éléments finis aux frontières. Les hypothèses supposent que les infrastructures sont invariantes dans la direction de mouvement Ox des véhicules qui ont des vitesses constantes et que le sol est stratifié horizontalement. Le problème a été d'abord transformé par la méthode intégrale le long de la direction infinie : transformation en t et en Ox dans l'infrastructure et transformation de Hankel dans le sol. Ensuite, il est résolu par la méthode de Galerkin dans le domaine borné. Un autre modèle numérique qui est construit de la même façon peut être trouvé dans [76] dans lequel la solution numérique a été validée en comparant avec celle analytique dans le cas d'une charge ponctuelle se déplaçant sur un demi-espace homogène. Les auteurs montrent aussi les résultats numériques d'un problème de passage d'un véhicule (qui est modélisé comme un système 2D de 4 ddl) sur une chaussée en interaction avec le sol.

Calcul dans le repère mobile. Dans le but de diminuer la taille du domaine de calcul qui doit être très grande pour une charge mobile, l'idée d'écrire la formulation des éléments finis dans un repère mobile a été proposée. Le problème est établi dans ce nouveau domaine par un changement de variable. L'avantage de cette méthode est la facilité pour déterminer la réponse de la structure en régime permanent. Cette méthode est encore très peu utilisée dans la littérature.

Andersen *et al.* [7] ont présenté un calcul par éléments finis dans le repère mobile du problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli posée sur la fondation de Winkler. Le système d'équations dynamiques de même forme que l'équation 1.21 est retrouvé mais avec des termes convectifs ajoutés dans les matrices de rigidité et d'amortissement qui viennent du changement de variable. Une charge d'amplitude variable en fonction du temps a été considérée. Les résultats numériques et analytiques sont comparés dans le cas de charges harmoniques.

⁴la procédure DG discrétise par des éléments finis le temps et l'espace en même temps avec des fonctions de forme qui sont continues en déplacement mais peuvent être discontinues au niveau du temps [52][53][74]

Si la charge considérée est constante, le problème dans le repère mobile en régime permanent devient statique. On peut trouver dans [64] une étude sur le problème 2D ou dans [85] une autre sur un demi- espace non-linéaire en 3D.

Quand la vitesse de charge devient grande, les termes de convection deviennent importants et la discrétisation de Galerkin standard donne des instabilités de vibration. Dans ce cas, la méthode de Petrov-Galerkin (voir par exemple [115]) qui introduit une partie asymétrique dans la fonction de forme peut être utilisée. Dans [65], Krenk *et al.* propose une méthode de Taylor-Galerkin modifiée où un terme de correction de type “upstream difference” est implémenté dans la discrétisation standard.

Cependant, la résolution par éléments finis dans le repère mobile est toujours limitée pour les vitesses subsoniques. Dans le cas supersonique, Kok [64] a proposé que, au lieu d’écrire deux conditions aux limites, on doit écrire une condition initiale à la frontière droite. De toute manière, cette méthode ne peut s’appliquer qu’aux cas simples. Il n’y a pas encore de procédure générale pour toutes les vitesses de charge.

Condition aux limites. En utilisant la méthode des éléments finis, le maillage est limité à un domaine fini avec des conditions imposées aux limites, soit pour les déplacements soit pour les contraintes. Cela pose toujours des difficultés pour modéliser le problème de propagation d’ondes dans un domaine infini à cause des ondes réfléchies aux frontières. En regardant dans la littérature, on peut trouver un grand nombre d’études pour résoudre cette difficulté. Le plus important est d’assurer la condition de radiation qui impose qu’il n’y a pas d’énergie venant de l’infini. On peut énumérer quelques modèles différents appliqués aux problèmes de propagation d’ondes :

- Calculer sur un domaine très grand tel que toutes les énergies peuvent être amorties avant qu’elles arrivent aux frontières. Cette modélisation est très chère et ne peut s’appliquer qu’aux problèmes où les ondes sont atténuées rapidement par les amortissements dans la structure.
- Utiliser des ressorts et des amortisseurs (visco-élastiques) aux frontières tels que les fréquences dominantes sont amorties.
- Utiliser des éléments infinis spéciaux qui peuvent s’adapter aux cas spécifiques. En principe, les éléments infinis sont construits par des fonctions d’interpolation spéciales qui considèrent les noeuds extérieurs comme étant à l’infini [115]. Pour le problème de propagation d’ondes, ces fonctions d’interpolation doivent comporter aussi des termes qui représentent les ondes qui se propagent vers l’infini (voir par exemple Yerli *et al.* [111]).
- Les méthodes mixtes qui combinent la méthode des éléments finis et les méthodes qui utilisent les solutions fondamentales, par exemple la méthode des éléments de frontières. L’avantage est que la condition de radiation est déjà automatiquement vérifiée dans la solution élémentaire. Cependant, la solution n’est pas toujours facile à trouver dans le cas général [18].
- Ajouter une couche absorbante dans laquelle un amortissement assez important sera introduit et de façon régulière pour que les ondes puissent entrer dans cette couche sans être réfléchies et que toutes les énergies soient absorbées avant d’arriver à la frontière [24][112].
- Utiliser les procédures purement numériques proposées par Wolf et Song [107]
- etc.

Dans le cadre de l’application aux problèmes de charge mobile, la méthode des éléments aux frontières est construite de façon usuelle : Pan *et al.* [90], Aubry *et al.* [8] ... Récemment, Rassmusen *et al.* [95] ont formulé la fonction de Green pour le déplacement et la traction sur la surface d’un demi-espace dans le repère mobile. Les résultats pour le cas 2D sont comparés à ceux d’un calcul en éléments finis utilisant une condition absorbante qui est proposée par Krenk *et al.* [65].

Dans leur calcul, Krenk *et al.* ont introduit une matrice d’impédance mise à la frontière en tenant compte du terme convectif qui vient du fait que le problème est passé dans le repère mobile.

Une matrice non-symétrique a été obtenue qui est formulée à partir de deux directions séparées pour l'onde P et pour l'onde S . Une technique similaire appliquée au problème d'une source acoustique mobile est aussi utilisée par Kirkegaard *et al.* dans [61].

Toujours dans le repère mobile, mais pour le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli posée sur la fondation de Winkler, Andersen *et al.* [7] ont proposé une condition absorbante qui est basée sur une relation explicite entre la force de réaction, le déplacement et la vitesse à la frontière dans le domaine du temps. Cette relation est obtenue par une linéarisation de la fonction de transfert force-déplacement dans le domaine des fréquences. Cela donne le résultat exact si la charge est harmonique mais pas avec un signal de charge quelconque.

1.5 Sur le comportement dynamique du matériau ballast.

Le ballast est un matériau granulaire. Dans la nature, les matériaux granulaires (mais aussi les sols, poudres, roches, ...) sont des milieux biphasiques constitués d'une phase solide dispersive et d'une phase fluide. La propriété essentielle qui distingue un milieu granulaire par rapport aux autres milieux solides multiphasiques est la nature discrète de la phase solide. Comme la distribution statique et dynamique des contraintes dépend de l'état des contacts entre les particules au moment considéré, le milieu granulaire est un milieu très nonlinéaire et dissipatif.

On va présenter dans la suite deux aspects pour modéliser le matériau granulaire : le modèle discret et le modèle continu.

1.5.1 Modèle discret.

Ce modèle considère le milieu ballast comme un ensemble d'éléments discrets. Chaque élément peut être déformable ou indéformable. L'hypothèse de corps rigide est la plus utilisée puisque dans une condition de contact normale, les grains dans le milieu granulaire sont très sensibles aux mouvements dans les directions de traction et de glissement.

La méthode pour étudier numériquement le problème dynamique dans ce modèle est la méthode des éléments discrets (MED). En général, en utilisant l'hypothèse des particules rigides, MED part des équations de mouvement de Newton où chaque particule i dans l'ensemble de N particules a 6 degrés de liberté (3 en translation et 3 en rotations) [35] :

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{f}_i^g + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ij}^c ; \quad I_i \ddot{\boldsymbol{\theta}}_i = \mathbf{m}_i^g + \sum_{j=1}^N \mathbf{m}_{ij}^c \quad (1.23)$$

où m_i et I_i sont la masse et le moment d'inertie de la particule i , \mathbf{f}_{ij}^c et \mathbf{m}_{ij}^c sont les vecteurs forces et moments de contacts appliqués sur la particule, \mathbf{f}_i^g et \mathbf{m}_i^g sont les forces et les moments autre que le contact (volumique) sur la particule i . Des algorithmes d'intégrations numériques (méthode de différence finie) sont utilisés pour résoudre ce système. La difficulté est la détection des contacts pour chaque particule à chaque pas de temps. On peut citer plusieurs études sur le schéma d'intégration et l'algorithme de détection, par exemple : Azanza [9], Wassgren [106], Oviedo [88][89] pour les éléments circulaires 2D, Oviedo [88] pour les éléments triangulaires 2D, Cundall [25], Ghraboussi [42] pour les éléments polyédriques 3D ... Il a montré que, en prenant un pas de temps de calcul suffisamment petit dans la simulation numérique, les ondes ne peuvent pas se propager entre les grains voisins, et la vibration d'une particule ne dépend que des forces de contact (voir [106] [113]).

La plupart des études réalisées avec la méthode des éléments discrets sont construites pour étudier la vibration d'un ensemble de particules. Le problème de propagation d'ondes pour évaluer la réponse dynamique des voies ballastées est peu étudié. Dans la littérature, le problème des ondes

dans l'intérieur des particules n'est pas vraiment traité, mais en fait, la propagation des ondes dans un paquet de grains est considérée comme la propagation des contraintes aux points de contacts. Citons par exemple ; les travaux de Melin [79] (qui a montré que la vitesse des ondes dépend aussi de l'amplitude de la force appliquée), de Sadd *et al.* [98] (qui ont montré en étudiant des particules elliptiques que la propagation des ondes dans un ensemble de particules dépend beaucoup des arrangements spatiaux) , de Shulka *et al.* [102] (qui ont comparé les résultats expérimentaux et numériques sur un ensemble de particules circulaires) ...

Ce modèle est réaliste pour modéliser les matériaux granulaires mais par contre, demande un volume de calcul très important.

1.5.2 Modèle continu

Dans le cas où la taille des particules est suffisamment petite par rapport à la dimension du domaine, le modèle continu peut être utilisé pour étudier le problème global. Les modèles continus construisent les lois de comportement à partir de la microstructure discrète (équation 1.23). Granik et Ferrari [43] ont proposé un modèle élastique linéaire, puis dans [78], Maddalena et Ferrari ont proposé un modèle de viscoélasticité. Des modèles élastiques d'ordre plus élevé ont été proposés par Chang *et al.* [19][20], Mühlhaus [84] ... En outre, une discussion sur la définition des contraintes et des déformations dans un domaine de matériaux granulaires a été donnée par Bagi [10].

Le comportement dynamique du matériau granulaire a été étudié en utilisant ces modèles continus. Les équations de dispersion d'ondes présentées dans [19] montrent que le matériau granulaire est par nature un filtre dans lequel les ondes de petites longueurs et de hautes fréquences ne peuvent pas se propager. Le problème dynamique d'une couche de matériau granulaire posée sur un demi-espace est considéré dans les travaux de Suiker *et al.* [103] pour une charge fixe ou [104][105] pour une charge mobile.

1.6 Conclusion

Bien que le problème dynamique induit par le trafic a été beaucoup considéré dans la littérature, très peu d'études ont été faites en tenant compte de la non-linéarité de la structure. On va proposer dans cette thèse, des modèles et des méthodes de résolution qui permettent d'évaluer l'influence de la non-linéarité sur la réponse dynamique des structures due aux charges mobiles. Les valeurs des vitesses critiques avec la présence de la non-linéarité seront aussi déterminées. Un modèle continu qui permet de tenir compte de l'effet unilatéral dans le ballast sera aussi introduit.

Chapitre 2

Charge harmonique mobile sur un demi-espace visco-élastique stratifié

2.1 Introduction

On s'intéresse à la réponse dynamique linéaire en régime permanent d'un demi-espace multicouches soumis à une charge mobile appliquée sur sa surface libre.

Ce type de problème a été beaucoup étudié, surtout dans la modélisation des routes et des voies ferrées. Le but de ce chapitre n'est pas d'introduire une nouvelle méthode de résolution de ce problème mais de comprendre ce qui se passe dans les différentes situations de vitesse et de fréquences de la charge. Le système d'équations élastodynamiques sera résolu comme un problème statique dans un nouveau repère de coordonnées qui est attaché à la position de la force. On va ensuite transformer les équations dans ce nouveau repère dans le domaine des nombres d'onde par une transformation de Fourier dans le plan horizontal $((X_1, X_2) \rightarrow (k_1, k_2))$. Celle-ci nous donnera un système d'équations différentielles dans la direction verticale avec les conditions aux limites (à la surface, à l'infini et entre les couches). Les solutions seront finalement obtenues par des transformations de Fourier inverses.

Les différents cas de vitesse et de fréquence de la charge, ainsi que d'empilements de couches du milieu seront traités. Pour une application aux voies ferrées, on va calculer aussi le problème avec un signal de force qui représente la distribution de la charge de deux essieux transmise par le rail sur le ballast.

2.2 Problème posé dans le repère mobile

2.2.1 Système d'équations élastodynamiques

Soit un demi-espace multicouche $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; x_3 \geq 0\}$ qui est constitué de n couches visco-élastiques. Les épaisseurs des couches sont h_i ($i = 1 \div n$). A chaque point $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ dans la couche $i \in \Omega$, l'équation élasto-dynamique de Navier s'écrit :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{g} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le vecteur déplacement au point \mathbf{x} à l'instant t ($\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^t$). Les coefficients ρ , λ , μ sont respectivement la densité et les deux coefficients élastiques de Lamé de la couche considérée. Le terme $\rho \mathbf{g}$ désigne la force volumique qui sera omise dans la suite car seule la partie dynamique de la réponse sera calculée.

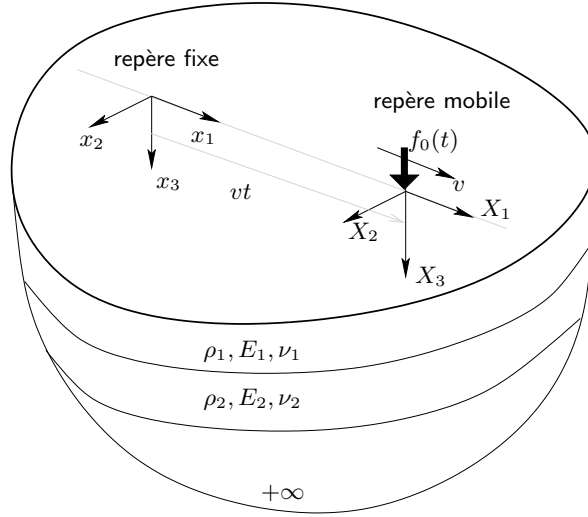


FIGURE 2.1. Charge mobile sur un milieu multicouche

La relation de contrainte-déformation $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\epsilon})$ peut être écrite par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad \text{où} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \delta \text{ est le delta de Kröner } \quad (2.2)$$

La charge mobile s'applique sur la surface et se déplace avec une vitesse constante v . C'est une charge harmonique et elle peut avoir un des deux types suivants :

– soit une force ponctuelle :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \delta(x_1 - vt) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad (2.3)$$

– soit une force uniforme sur une surface $([-a, a] \times [-b, b])$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} H(a - |x_1 - vt|) H(b - |x_2|) \delta(x_3) \quad (2.4)$$

$\delta(\cdot)$ et $H(\cdot)$ désignent les fonctions de Dirac et d'Heaviside.

Les conditions aux limites s'écrivent à la surface libre, aux interfaces et à l'infini :

- $x_3 = 0$: $\boldsymbol{\sigma}_{(z=0)} \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{f}$
- $x_3 = z_i$: $\mathbf{u}(z_i^+) = \mathbf{u}(z_i^-)$ et $\boldsymbol{\sigma}(z_i^+) \cdot \mathbf{n}_3 = \boldsymbol{\sigma}(z_i^-) \cdot \mathbf{n}_3$
- $x_3 = +\infty$: condition de Sommerfeld.

2.2.2 Changement de variable

Comme la charge se déplace avec une vitesse constante, la solution en régime permanent de (2.1) devient stationnaire dans un repère mobile qui se déplace avec la même vitesse. Pour passer dans ce nouveau repère, on réalise le changement de variable :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{x} - vt \mathbf{e}_1 \quad (2.5)$$

La solution harmonique stationnaire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ dans ce repère mobile peut être représentée par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}_0(\mathbf{X}) e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

et les dérivées de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en temps deviennent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = i\omega \mathbf{U} - v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_1} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{U} - 2i\omega v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_1} + v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_1^2} \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.6) et (2.8) dans (2.1), l'équation élastodynamique dans le repère mobile devient une équation différentielle statique :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + \rho \omega^2 \mathbf{U} + 2i\rho\omega v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_1} - \rho v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_1^2} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Cette équation peut être aussi écrite autrement en la divisant par ρ :

$$\boxed{c_s^2 \nabla^2 \mathbf{U} + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{U} + 2i\omega v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_1} - v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_1^2} = \mathbf{0}} \quad (2.10)$$

où c_p et c_s sont les vitesses des ondes de dilatation et de cisaillement :

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad ; \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.11)$$

2.3 Méthode de résolution par la transformation de Fourier

2.3.1 Système d'équations dans le domaine des nombres d'onde

Comme le milieu considéré est homogène dans deux directions horizontales ($O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$), on va faire une transformation de Fourier des équations dans ces deux directions :

$$\hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_2 X_2} dX_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(X_1, X_2, X_3) e^{-ik_1 X_1} dX_1 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_2 X_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3) e^{ik_1 X_1} dk_1 \quad (2.13)$$

En remplaçant (2.13) dans (2.10), on peut écrire un système d'équations différentielles sur $\hat{\mathbf{U}}$ dans le domaine des nombres d'onde par rapport à la seule variable X_3 :

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3)}{\partial X_3^2} + i\mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3)}{\partial X_3} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

où :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_p^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1(c_p^2 - c_s^2) \\ 0 & 0 & k_2(c_p^2 - c_s^2) \\ k_1(c_p^2 - c_s^2) & k_2(c_p^2 - c_s^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_1^2 c_p^2 + k_2^2 c_s^2 - (\omega - vk_1)^2 & k_1 k_2 (c_p^2 - c_s^2) & 0 \\ k_1 k_2 (c_p^2 - c_s^2) & k_1^2 c_s^2 + k_2^2 c_p^2 - (\omega - vk_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_1^2 c_s^2 + k_2^2 c_s^2 - (\omega - vk_1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Démonstration.

On évalue chaque partie de (2.10) dans le domaine des nombres d'onde :

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_3^2} \xrightarrow{TF} -k_1^2 \hat{\mathbf{U}} - k_2^2 \hat{\mathbf{U}} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{U}}}{\partial X_3^2} \quad (2.17)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_2}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_3}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}_1}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_3}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}_1}{\partial X_3 \partial X_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_2}{\partial X_3 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}_3}{\partial X_3^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{TF} \begin{pmatrix} -k_1^2 \hat{\mathbf{U}}_1 - k_1 k_2 \hat{\mathbf{U}}_2 + i k_1 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_3}{\partial X_3} \\ -k_1 k_2 \hat{\mathbf{U}}_1 - k_2^2 \hat{\mathbf{U}}_2 + i k_2 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_3}{\partial X_3} \\ i k_1 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_1}{\partial X_3} + i k_2 \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_2}{\partial X_3} + \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{U}}_3}{\partial X_3^2} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\omega^2 \mathbf{U} + 2i\omega v \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial X_1} - v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X_1^2} \xrightarrow{TF} \omega^2 \hat{\mathbf{U}} - 2\omega v k_1 \hat{\mathbf{U}} + v^2 k_1^2 \hat{\mathbf{U}} \quad (2.19)$$

En faisant la somme de ces trois expressions et en mettant sous forme matricielle, on obtient (2.14).

□

On peut aussi exprimer la TF des trois composantes du tenseur des contraintes sur un plan horizontal ($\hat{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_3$) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \{\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{33}\}^t \\ &= \left\{ \mu \left(i k_1 \hat{\mathbf{U}}_3 + \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_1}{\partial X_3} \right), \mu \left(i k_2 \hat{\mathbf{U}}_3 + \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_2}{\partial X_3} \right), \lambda \left(i k_1 \hat{\mathbf{U}}_1 + i k_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_3}{\partial X_3} \right\}^t \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3.2 Détermination des fonctions $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{t}}$

On va chercher maintenant la solution de (2.14) sous la forme d'une fonction exponentielle $\hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2, X_3) = \tilde{\mathbf{U}}(k_1, k_2) e^{i k_3 X_3}$. Remplaçant cette solution dans (2.14), on obtient :

$$(-k_3^2 \mathbf{A} - k_3 \mathbf{B} - \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{U}}(k_1, k_2) = 0 \quad (2.21)$$

La condition d'existence de solutions non nulles de (2.21) nous permet de déterminer k_3 :

$$\det(k_3^2 \mathbf{A} + k_3 \mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0 \quad (2.22)$$

soit :

$$\det \begin{bmatrix} c_s^2 k_3^2 + k_1^2 c_p^2 + k_2^2 c_s^2 - (\omega - v k_1)^2 & k_1 k_2 (c_p^2 - c_s^2) & k_1 k_3 (c_p^2 - c_s^2) \\ k_1 k_2 (c_p^2 - c_s^2) & c_s^2 k_3^2 + k_1^2 c_s^2 + k_2^2 c_p^2 - (\omega - v k_1)^2 & k_2 k_3 (c_p^2 - c_s^2) \\ k_1 k_3 (c_p^2 - c_s^2) & k_2 k_3 (c_p^2 - c_s^2) & c_p^2 k_3^2 + k_1^2 c_s^2 + k_2^2 c_s^2 - (\omega - v k_1)^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

Ce déterminant se réduit à une expression assez simple après quelques simplifications :

$$[c_p^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (\omega - v k_1)^2][c_s^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (\omega - v k_1)^2]^2 = 0 \quad (2.24)$$

cela nous donne les solutions de k_3 :

$$k_3 = \pm i [k_1^2 - (k_p - m_p k_1)^2 + k_2^2]^{\frac{1}{2}} := \pm i \kappa_p \quad (2.25)$$

$$k_3 = \pm i [k_1^2 - (k_s - m_s k_1)^2 + k_2^2]^{\frac{1}{2}} := \pm i \kappa_s \quad (2.26)$$

où :

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad ; \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad ; \quad m_p = \frac{v}{c_p} \quad ; \quad m_s = \frac{v}{c_s} \quad (2.27)$$

$$\kappa_p = \sqrt{k_1^2 - (k_p - m_p k_1)^2 + k_2^2} \quad ; \quad \kappa_s = \sqrt{k_1^2 - (k_s - m_s k_1)^2 + k_2^2} \quad ; \quad (2.28)$$

On a deux valeurs propres uniques pour l'onde de compression et deux valeurs propres doubles pour les ondes de cisaillement. Sans perte de généralité, on suppose que : $\text{Re}(\kappa_p) > 0$; $\text{Re}(\kappa_s) > 0$. Les deux constantes m_p et m_s sont connues dans la littérature comme les *nombre de Mach*.

Les vecteurs propres correspondants à k_3 sont :

$$\tilde{\mathbf{U}}_{1,2} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \pm i\kappa_p \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\kappa_s \\ ik_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{5,6} = \begin{pmatrix} \pm\kappa_s \\ 0 \\ ik_1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de $\hat{\mathbf{U}}$ est donc :

$$\hat{U}_1 = k_1 A_1^- e^{-\kappa_p X_3} + \kappa_s A_3^- e^{-\kappa_s X_3} + k_1 A_1^+ e^{\kappa_p X_3} - \kappa_s A_3^+ e^{\kappa_s X_3} \quad (2.29)$$

$$\hat{U}_2 = k_2 A_1^- e^{-\kappa_p X_3} + \kappa_s A_2^- e^{-\kappa_s X_3} + k_2 A_1^+ e^{\kappa_p X_3} - \kappa_s A_2^+ e^{\kappa_s X_3} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_3 = & i\kappa_p A_1^- e^{-\kappa_p X_3} + ik_2 A_2^- e^{-\kappa_s X_3} + ik_1 A_3^- e^{-\kappa_s X_3} \\ & - i\kappa_p A_1^+ e^{\kappa_p X_3} + ik_2 A_2^+ e^{\kappa_s X_3} + ik_1 A_3^+ e^{\kappa_s X_3} \end{aligned} \quad (2.31)$$

et on peut aussi en déduire les expressions de $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_3$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{13} = & \mu[-2k_1\kappa_p A_1^- e^{-\kappa_p X_3} - k_1 k_2 A_2^- e^{-\kappa_s X_3} - (k_1^2 + \kappa_s^2) A_3^- e^{-\kappa_s X_3} \\ & + 2k_1\kappa_p A_1^+ e^{\kappa_p X_3} - k_1 k_2 A_2^+ e^{\kappa_s X_3} - (k_1^2 + \kappa_s^2) A_3^+ e^{\kappa_s X_3}] \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{23} = & \mu[-2k_2\kappa_p A_1^- e^{-\kappa_p X_3} - (k_2^2 + \kappa_s^2) A_2^- e^{-\kappa_s X_3} - k_1 k_2 A_3^- e^{-\kappa_s X_3} \\ & + 2k_2\kappa_p A_1^+ e^{\kappa_p X_3} - (k_2^2 + \kappa_s^2) A_2^+ e^{\kappa_s X_3} - k_1 k_2 A_3^+ e^{\kappa_s X_3}] \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{33} = & i\mu[-(k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2) A_1^- e^{-\kappa_p X_3} - 2k_2\kappa_s A_2^- e^{-\kappa_s X_3} - 2k_1\kappa_s A_3^- e^{-\kappa_s X_3} \\ & - (k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2) A_1^+ e^{\kappa_p X_3} + 2k_2\kappa_s A_2^+ e^{\kappa_s X_3} + 2k_1\kappa_s A_3^+ e^{\kappa_s X_3}] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Démonstration.

Deux expressions (2.32) et (2.33) sont évidentes à partir de (2.20) en dérivant la solution générale de $\hat{\mathbf{U}}$. La solution $\hat{\sigma}_{33}$ vient de :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{33} = & \lambda(ik_1 \hat{U}_1 + ik_2 \hat{U}_2) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} \\ = & i[\lambda(k_1^2 + k_2^2) - \kappa_p^2(\lambda + 2\mu)] A_1^- e^{-\kappa_p X_3} + i[\lambda(k_1^2 + k_2^2) - \kappa_p^2(\lambda + 2\mu)] A_1^+ e^{\kappa_p X_3} \\ & + i\mu[-2k_2\kappa_s A_2^- e^{-\kappa_s X_3} + 2k_2\kappa_s A_2^+ e^{\kappa_s X_3} - 2k_1\kappa_s A_3^- e^{-\kappa_s X_3} + 2k_1\kappa_s A_3^+ e^{\kappa_s X_3}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

On va simplifier encore le terme $\lambda(k_1^2 + k_2^2) - \kappa_p^2(\lambda + 2\mu)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lambda(k_1^2 + k_2^2) - \kappa_p^2(\lambda + 2\mu) = & \rho \left\{ (c_p^2 - 2c_s^2)(k_1^2 + k_2^2) - c_p^2 \left[k_1^2 + k_2^2 - \frac{(\omega - vk_1)^2}{c_p^2} \right] \right\} \\ = & \rho \{ -2c_s^2(k_1^2 + k_2^2) + (\omega - vk_1)^2 \} \\ = & \rho \{ -c_s^2(k_1^2 + k_2^2) - [c_s^2(k_1^2 + k_2^2) - (\omega - vk_1)^2] \} \\ = & -\mu[k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2] \end{aligned} \quad (2.36)$$

On en déduit (2.34)

□

Pour la commodité du calcul, on va représenter les expressions de $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{t}}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{t}} \end{pmatrix} = & \mathbf{C} \mathbf{e} \mathbf{A} \\ = & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^- \\ \mathbf{A}^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

où :

$$\mathbf{A}^- = \{A_1^-, A_2^-, A_3^-\}^t \quad ; \quad \mathbf{A}^+ = \{A_1^+, A_2^+, A_3^+\}^t \quad ; \quad (2.38)$$

$$\mathbf{e}^- = \begin{bmatrix} e^{-\kappa_p X_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_s X_3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_s X_3} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{e}^+ = \begin{bmatrix} e^{\kappa_p X_3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\kappa_s X_3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\kappa_s X_3} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \kappa_s \\ k_2 & \kappa_s & 0 \\ i\kappa_p & ik_2 & ik_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -\kappa_s \\ k_2 & -\kappa_s & 0 \\ -i\kappa_p & ik_2 & ik_1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} -2\mu k_1 \kappa_p & -\mu k_1 k_2 & -\mu(k_1^2 + \kappa_s^2) \\ -2\mu k_2 \kappa_p & -\mu(k_2^2 + \kappa_s^2) & -\mu k_1 k_2 \\ -i\mu(k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2) & -2i\mu k_2 \kappa_s & -2i\mu k_1 \kappa_s \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2\mu k_1 \kappa_p & -\mu k_1 k_2 & -\mu(k_1^2 + \kappa_s^2) \\ 2\mu k_2 \kappa_p & -\mu(k_2^2 + \kappa_s^2) & -\mu k_1 k_2 \\ -i\mu(k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2) & 2i\mu k_2 \kappa_s & 2i\mu k_1 \kappa_s \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Notons que le vecteur d'amplitude \mathbf{A} se décompose en deux sous-vecteurs \mathbf{A}^- et \mathbf{A}^+ qui correspondent aux termes d'exponentielles négatives et aux termes d'exponentielles positives, respectivement. En fait, ces deux sous-vecteurs permettent de distinguer deux types d'onde dans chaque couche : les ondes incidentes (-) et les ondes réfléchies (+).

Alors, dans chaque couche, on peut exprimer les transformations de Fourier des vecteurs des déplacements et des contraintes ($\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\mathbf{t}}$) en fonction du vecteur d'amplitude \mathbf{A} . Ce vecteur sera déterminé à partir des conditions aux limites.

2.3.3 Conditions aux limites

Supposons que le demi-espace considéré se compose de n couches, on a vu qu'il y a 6 inconnues dans chaque couche. Il faudra donc établir $6 \times n$ équations pour résoudre le problème. Ces équations viennent des conditions aux limites.

- **Condition de continuité.** Sur l'interface entre deux couches, on a la continuité des déplacements et des contraintes. Considérons l'interface entre deux couches i et $i+1$, on a :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{t}} \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{t}} \end{pmatrix}^{i+1} \quad (2.43)$$

or par l'écriture de (2.37) :

$$\mathbf{C}^i \mathbf{e}_i \mathbf{A}_i = \mathbf{C}^{i+1} \mathbf{e}_{i+1} \mathbf{A}_{i+1} \quad \text{à} \quad X_3 = h_{i,i+1} \quad (2.44)$$

où $h_{i,i+1}$ désigne la profondeur de la position de l'interface entre deux couches $i, i+1$.

- **Condition aux limites sur la surface libre.** A la surface libre, $X_3 = 0$, on a $\mathbf{e} = \mathbf{1}$, la condition d'équilibre des contraintes s'écrit :

$$[\mathbf{C}_{21} \quad \mathbf{C}_{22}]^1 \begin{pmatrix} \mathbf{A}^- \\ \mathbf{A}^+ \end{pmatrix}_1 = \hat{\mathbf{f}} \quad \text{à} \quad X_3 = 0 \quad (2.45)$$

où $\hat{\mathbf{f}}$ est la TF du vecteur force appliqué sur la surface qui peut être déterminée en fonction de sa forme :

◦ cas d'une force ponctuelle :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \delta(X_1) \delta(X_2) \delta(X_3) e^{-ik_1 X_1} e^{-ik_2 X_2} dX_1 dX_2 \\ &= \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \delta(X_3)\end{aligned}\quad (2.46)$$

◦ cas d'une force uniforme :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} H(|a| - X_1) H(|b| - X_2) \delta(X_3) e^{-ik_1 X_1} e^{-ik_2 X_2} dX_1 dX_2 \\ &= \frac{4\mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \delta(X_3) \sin(k_1 a) \sin(k_2 b)}{k_1 k_2}\end{aligned}\quad (2.47)$$

- **Condition aux limites à l'infini.** La dernière couche n est un demi-espace et donc quand $X_3 \rightarrow +\infty$: $\hat{\mathbf{U}} \rightarrow 0$. Cette condition impose que :

$$\mathbf{A}_n^+ = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

2.3.4 Établissement et résolution du système d'équations

Le problème se ramène alors à un système d'équations linéaires de $6 \times n$ inconnues : 3 à la surface libre, 3 à l'infini et $6(n-1)$ à $(n-1)$ interfaces. Les coefficients \mathbf{A} peuvent être déterminés en principe normalement. Cependant, dans la mise en œuvre numérique, ce système d'équations ne peut presque pas être formé parce que les valeurs des termes exponentiels excèdent facilement la valeur limite de représentation des chiffres dans l'ordinateur quand k_1, k_2 tendent vers l'infini et aussi quand X_3 devient grand. Afin d'éviter cet inconvénient, les traitements particuliers suivants peuvent être utilisés.

Comme \mathbf{A} est constant dans chaque couche et comme :

$$\mathbf{A} e^{\alpha X_3} = \mathbf{A} e^{\alpha h} e^{\alpha(X_3-h)} := \tilde{\mathbf{A}} e^{\alpha(X_3-h)} \quad (2.49)$$

où $\tilde{\mathbf{A}}$ est toujours constant, le problème ne change donc pas si l'on choisit localement pour chaque couche i une origine des coordonnées à l'interface en haut $[i-1, i]$. L'équation de la condition de continuité entre deux couches $[i, i+1]$ (2.44) écrite avec ce choix devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^i & \mathbf{C}_{12}^i \\ \mathbf{C}_{21}^i & \mathbf{C}_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_i^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{e}}_i^+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i^- \\ \mathbf{A}_i^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^{i+1} & \mathbf{C}_{12}^{i+1} \\ \mathbf{C}_{21}^{i+1} & \mathbf{C}_{22}^{i+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i+1}^- \\ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

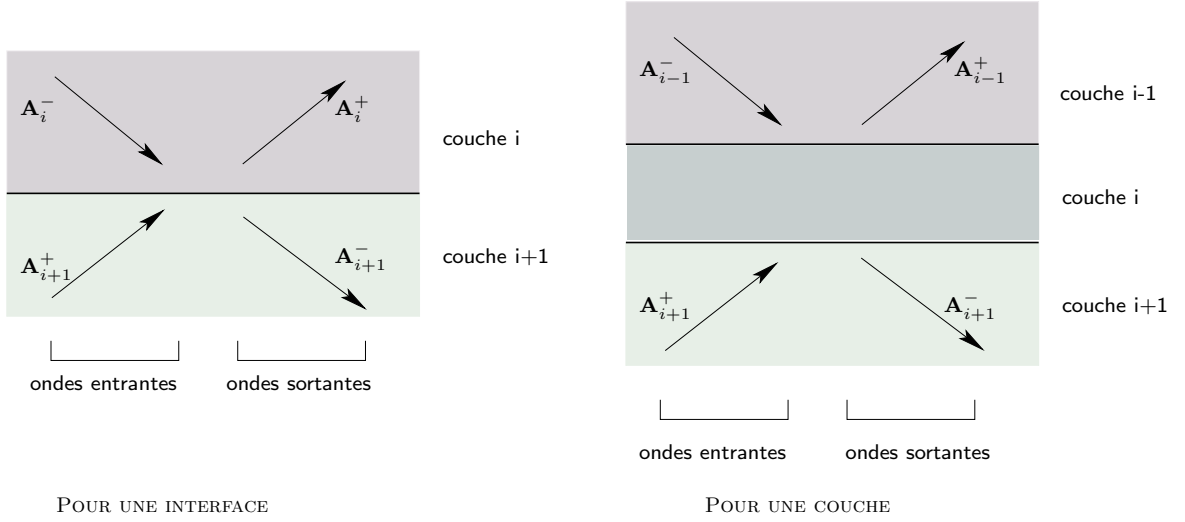
où : $\bar{\mathbf{e}}_i^\pm = \mathbf{e}_i^\pm(X_3 = d_i)$ et d_i est l'épaisseur de la couche i . On note aussi que comme cette condition est écrite à l'origine des coordonnées de la couche $i+1$, la matrice exponentielle est éliminée à droite puisque : $\mathbf{e}_{i+1}^-(X_3 = 0) = \mathbf{e}_{i+1}^+(X_3 = 0) = \mathbf{1}$.

Il est plus intéressant d'écrire la condition de continuité (2.50) comme une relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes de l'interface $[i, i+1]$ comme suit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_i^+ \\ \mathbf{A}_{i+1}^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{i,i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i^- \\ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{pmatrix}} \quad (2.51)$$

on appelle $\mathbf{Q}^{i,i+1}$ la matrice de transfert à l'interface et on la définit par :

$$\mathbf{Q}^{i,i+1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_i^- \mathbf{L}_{11}^{i,i+1} \bar{\mathbf{e}}_i^- & \bar{\mathbf{e}}_i^- \mathbf{L}_{12}^{i,i+1} \\ \mathbf{L}_{21}^{i,i+1} \bar{\mathbf{e}}_i^- & \mathbf{L}_{22}^{i,i+1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

FIGURE 2.2. *Illustration des ondes entrantes et sortantes*

où :

$$\mathbf{L}_{11}^{i,i+1} = -[(\mathbf{C}_{11}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{12}^i - (\mathbf{C}_{21}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{22}^i]^{-1}[(\mathbf{C}_{11}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{11}^i - (\mathbf{C}_{21}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{21}^i] \quad (2.53)$$

$$\mathbf{L}_{12}^{i,i+1} = [(\mathbf{C}_{11}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{12}^i - (\mathbf{C}_{21}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{22}^i]^{-1}[(\mathbf{C}_{11}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{12}^{i+1} - (\mathbf{C}_{21}^{i+1})^{-1}\mathbf{C}_{22}^{i+1}] \quad (2.54)$$

$$\mathbf{L}_{21}^{i,i+1} = [(\mathbf{C}_{12}^i)^{-1}\mathbf{C}_{11}^{i+1} - (\mathbf{C}_{22}^i)^{-1}\mathbf{C}_{21}^{i+1}]^{-1}[(\mathbf{C}_{12}^i)^{-1}\mathbf{C}_{11}^i - (\mathbf{C}_{22}^i)^{-1}\mathbf{C}_{21}^i] \quad (2.55)$$

$$\mathbf{L}_{22}^{i,i+1} = -[(\mathbf{C}_{12}^i)^{-1}\mathbf{C}_{11}^{i+1} - (\mathbf{C}_{22}^i)^{-1}\mathbf{C}_{21}^{i+1}]^{-1}[(\mathbf{C}_{12}^i)^{-1}\mathbf{C}_{12}^{i+1} - (\mathbf{C}_{22}^i)^{-1}\mathbf{C}_{22}^{i+1}] \quad (2.56)$$

Avec cette façon d'écrire la condition de continuité, on n'est plus gêné par les exponentielles positives. Si l'épaisseur de la couche i est importante, le terme $\bar{\mathbf{e}}_i^-$ devient très petit et cela conduit à une très petite onde réfléchie dans cette couche. On peut aussi vérifier que si deux couches sont identiques, $\mathbf{C}^i = \mathbf{C}^{i+1}$ implique que $\mathbf{L}_{11} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{1}$, $\mathbf{L}_{21} = \mathbf{1}$, $\mathbf{L}_{22} = \mathbf{0}$, i.e. $\mathbf{A}_i^+ = \bar{\mathbf{e}}_i^- \mathbf{A}_{i+1}^+$ et $\mathbf{A}_i^- = \bar{\mathbf{e}}_i^+ \mathbf{A}_{i+1}^-$.

Par conséquent, en connaissant les relations (2.51) pour deux interfaces $[i-1, i]$ et $[i, i+1]$, on peut déterminer la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes dans la couche i :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^+ \\ \mathbf{A}_{i+1}^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{i-1,i+1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^- \\ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

la matrice de transfert $\mathbf{Q}^{i-1,i+1}$ est une fonction de $\mathbf{Q}^{i-1,i}$ et $\mathbf{Q}^{i,i+1}$:

$$\mathbf{Q}^{i-1,i+1} = q(\mathbf{Q}^{i-1,i}, \mathbf{Q}^{i,i+1}) \quad (2.58)$$

qui est définie telle que :

$$\mathbf{Q}_{11}^{i-1,i+1} = \mathbf{Q}_{11}^{i-1,i} + \mathbf{Q}_{12}^{i-1,i} \mathbf{R}_a^i \mathbf{Q}_{11}^{i,i+1} \mathbf{Q}_{21}^{i-1,i} \quad (2.59)$$

$$\mathbf{Q}_{12}^{i-1,i+1} = \mathbf{Q}_{12}^{i-1,i} \mathbf{R}_a^i \mathbf{Q}_{12}^{i,i+1} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{Q}_{21}^{i-1,i+1} = \mathbf{Q}_{21}^{i,i+1} \mathbf{R}_b^i \mathbf{Q}_{21}^{i-1,i} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{Q}_{22}^{i-1,i+1} = \mathbf{Q}_{21}^{i,i+1} \mathbf{R}_b^i \mathbf{Q}_{22}^{i-1,i} \mathbf{Q}_{12}^{i,i+1} + \mathbf{Q}_{22}^{i,i+1} \quad (2.62)$$

où $\mathbf{R}_a^i = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^{i,i+1} \mathbf{Q}_{22}^{i-1,i})^{-1}$ et $\mathbf{R}_b^i = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^{i-1,i} \mathbf{Q}_{11}^{i,i+1})^{-1}$.

Démonstration.

Pour simplifier les expressions, on va noter $\mathbf{Q}^{i-1,i}$ et $\mathbf{Q}^{i,i+1}$ respectivement par \mathbf{Q}^- et \mathbf{Q}^+ . En utilisant l'équation (2.51) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^+ \\ \mathbf{A}_i^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^- \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i-1}^- \\ \mathbf{A}_i^+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i^+ \\ \mathbf{A}_{i+1}^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i^- \\ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

on a deux équations pour évaluer \mathbf{A}_i^- et \mathbf{A}_i^+ :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i^- = \mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{A}_i^+ \\ \mathbf{A}_i^+ = \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{A}_i^- + \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_i^- = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{11}^+)^{-1} [\mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+] \\ \mathbf{A}_i^+ = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{22}^-)^{-1} [\mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+] \end{cases} \quad (2.64)$$

Lorsque \mathbf{A}_i^- et \mathbf{A}_i^+ sont connus, on peut exprimer \mathbf{A}_{i-1}^+ et \mathbf{A}_{i+1}^- en fonction de \mathbf{A}_{i-1}^- et \mathbf{A}_{i+1}^+ en remplaçant \mathbf{A}_i^- , \mathbf{A}_i^+ dans (2.63) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i-1}^+ &= \mathbf{Q}_{11}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{12}^- \mathbf{A}_i^+ \\ &= \mathbf{Q}_{11}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{12}^- (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{22}^-)^{-1} [\mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+] \\ &= [\mathbf{Q}_{11}^- + \mathbf{Q}_{12}^- (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{22}^-)^{-1} \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{21}^-] \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{12}^- (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{22}^-)^{-1} \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i+1}^- &= \mathbf{Q}_{21}^+ \mathbf{A}_i^- + \mathbf{Q}_{22}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+ \\ &= \mathbf{Q}_{21}^+ (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{11}^+)^{-1} [\mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{12}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+] + \mathbf{Q}_{22}^+ \mathbf{A}_{i+1}^+ \\ &= \mathbf{Q}_{21}^+ (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{11}^+)^{-1} \mathbf{Q}_{21}^- \mathbf{A}_{i-1}^- + [\mathbf{Q}_{21}^+ (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{11}^+)^{-1} \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{12}^+ + \mathbf{Q}_{22}^+] \mathbf{A}_{i+1}^+ \end{aligned} \quad (2.66)$$

En notant $\mathbf{R}_a^i = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{11}^+ \mathbf{Q}_{22}^-)^{-1}$ et $\mathbf{R}_b^i = (\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^- \mathbf{Q}_{11}^+)^{-1}$, on déduit (2.57).

□

En utilisant (2.51) et (2.57), on est capable de calculer la matrice de transfert \mathbf{Q} pour un nombre de couches quelconque de façon itérative. On peut présenter la relation entre les ondes dans la première couche 1 et la dernière n par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^+ \\ \mathbf{A}_n^- \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{1,n} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^- \\ \mathbf{A}_n^+ \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

où $\mathbf{Q}^{1,n}$ est déterminé par une formule récursive :

$$\mathbf{Q}^{1,n} = q(\mathbf{Q}^{1,n-1}, \mathbf{Q}^{n-1,n}) \quad i = 2 \div n - 1 \quad (2.68)$$

la matrice $\mathbf{Q}^{n-1,n}$ est calculée par (2.51), la matrice $\mathbf{Q}^{1,n-1}$ est déterminée en utilisant la même relation (2.68) à partir de $\mathbf{Q}^{1,n-2}$ et $\mathbf{Q}^{n-2,n-1}$, etc.

A ce stade, on peut trouver facilement les vecteurs d'amplitude \mathbf{A}_i . La condition à l'infini (2.48) qui impose que $\mathbf{A}_n^+ = \mathbf{0}$ nous donne :

$$\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{Q}_{11}^{1,n} \mathbf{A}_1^- \quad (2.69)$$

et tenant compte de la condition à la surface libre (2.45) :

$$\mathbf{C}_{21}^1 \mathbf{A}_1^- + \mathbf{C}_{22}^1 \mathbf{A}_1^+ = \hat{\mathbf{f}}$$

les deux vecteurs \mathbf{A}_1^- et \mathbf{A}_1^+ s'en déduisent immédiatement :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_1^- &= [\mathbf{C}_{21}^1 + \mathbf{C}_{22}^1 \mathbf{Q}_{11}^{1,n}]^{-1} \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{A}_1^+ &= \mathbf{Q}_{11}^{1,n} [\mathbf{C}_{22}^1 \mathbf{Q}_{11}^{1,n} + \mathbf{C}_{21}^1]^{-1} \hat{\mathbf{f}} \end{aligned}} \quad (2.70)$$

Lorsque \mathbf{A}_1 est connu, les vecteurs \mathbf{A}_i de toutes les couches peuvent être calculés grâce aux deux relations (2.51) et (2.57). Supposons que \mathbf{A}_i soit déjà connu, \mathbf{A}_{i+1} peut être déterminé de la façon suivante :

$$(2.51) \Rightarrow \mathbf{A}_{i+1}^- = \mathbf{Q}_{21}^{i,i+1} \mathbf{A}_i^- + \mathbf{Q}_{22}^{i,i+1} \mathbf{A}_{i+1}^+$$

$$(2.57) \Rightarrow \mathbf{A}_{i+1}^+ = \mathbf{Q}_{11}^{i+1,n} \mathbf{A}_{i+1}^-$$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_{i+1}^- &= \left(\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^{i,i+1} \mathbf{Q}_{11}^{i+1,n} \right)^{-1} \mathbf{Q}_{21}^{i,i+1} \mathbf{A}_i^- \\ \mathbf{A}_{i+1}^+ &= \mathbf{Q}_{11}^{i+1,n} \left(\mathbf{1} - \mathbf{Q}_{22}^{i,i+1} \mathbf{Q}_{11}^{i+1,n} \right)^{-1} \mathbf{Q}_{21}^{i,i+1} \mathbf{A}_i^- \end{aligned}} \quad (2.71)$$

REMARQUE 2.3.1

1. Il faut faire attention de ne pas calculer \mathbf{A}_{i+1}^- et \mathbf{A}_{i+1}^+ en utilisant directement l'équation (2.51) parce qu'elle va faire apparaître des termes exponentiels positifs. La formule (2.71) est plus compliquée mais ne concerne que des exponentielles négatives.
2. Si le milieu considéré est un demi-espace homogène (une seule couche), on a tout de suite $\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{0}$ et donc \mathbf{A}_1^- est évalué simplement par :

$$\mathbf{A}_1^- = (\mathbf{C}_{21}^1)^{-1} \hat{\mathbf{f}} \quad (2.72)$$

2.3.5 Solution en espace

Lorsque les vecteurs d'amplitude \mathbf{A}_i^+ , \mathbf{A}_i^- de la couche considérée sont trouvés, toutes les inconnues dans le domaine des nombres d'ondes peuvent être déterminées à chaque point k_1 , k_2 . Les fonctions des déplacements et des contraintes sont calculées directement par la formule (2.37) :

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{C}_{11} \mathbf{e}^- \mathbf{A}^- + \mathbf{C}_{12} \mathbf{e}^+ \mathbf{A}^+ \quad (2.73)$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{C}_{21} \mathbf{e}^- \mathbf{A}^- + \mathbf{C}_{22} \mathbf{e}^+ \mathbf{A}^+ \quad (2.74)$$

Les autres composantes du tenseur des contraintes ($\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{12}$) peuvent être déterminées de la même façon qu'avec $\hat{\mathbf{t}}$. Dans plusieurs problèmes, il faut déterminer aussi la vitesse \mathbf{v} et l'accélération \mathbf{a} . En utilisant (2.7) et (2.8), les transformations de Fourier de ces deux inconnues peuvent être évaluées par :

$$\hat{\mathbf{v}} = i(\omega - vk_1) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.75)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\omega^2 - 2\omega vk_1 + v^2 k_1^2) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.76)$$

En connaissant la solution dans le domaine des nombres d'ondes, il faudra calculer la transformation de Fourier inverse (2.13) pour obtenir la solution en espace. Afin de pouvoir évaluer précisément cette intégration de la transformation inverse, il est intéressant de voir d'abord quel est le comportement de la solution dans le domaine des nombres d'onde et surtout de chercher s'il existe des points singuliers. On va considérer ici le cas plus simple où le domaine est un demi-espace homogène.

Comportement de la fonction $\hat{\mathbf{U}}$ pour un demi-espace homogène.

Dans ce cas, la solution $\hat{\mathbf{U}}$ est calculée simplement à partir de (2.37) et (2.72) :

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{C}_{11} \mathbf{e}^- (\mathbf{C}_{21})^{-1} \hat{\mathbf{f}} \quad (2.77)$$

on cherche s'il existe des points singuliers de cette fonction. Pour cela, il suffit de trouver les racines du déterminant de \mathbf{C}_{21} qui s'exprime par :

$$D(k_1, k_2) = \kappa_s^2 [(k_1^2 + k_2^2 + \kappa_s^2)^2 - 4(k_1^2 + k_2^2) \kappa_p \kappa_s] \quad (2.78)$$

on rappelle que :

$$\begin{aligned} \kappa_p &= \sqrt{k_1^2 - (k_p - m_p k_1)^2 + k_2^2} \quad ; \quad \kappa_s = \sqrt{k_1^2 - (k_s - m_s k_1)^2 + k_2^2} \\ k_{p,s} &= \frac{\omega}{c_{p,s}} \quad ; \quad m_{p,s} = \frac{v}{c_{p,s}} \end{aligned}$$

On peut trouver tout de suite que $k_1 = k_2 = 0$ est une racine de (2.78) si et seulement si $\omega = 0$. Pour les autres racines, en supposant que $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, on peut diviser (2.78) par $(k_1^2 + k_2^2)^2$ pour obtenir :

$$\left[2 - \frac{(k_s - m_s k_1)^2}{k_1^2 + k_2^2} \right]^2 - 4 \left[1 - \frac{(k_s - m_s k_1)^2}{k_1^2 + k_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{(k_p - m_p k_1)^2}{k_1^2 + k_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.79)$$

soit :

$$\left[2 - \frac{1}{c_s^2} \left(\frac{\omega - v k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right)^2 \right]^2 - 4 \left[1 - \frac{1}{c_s^2} \left(\frac{\omega - v k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{c_p^2} \left(\frac{\omega - v k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.80)$$

Cette équation est bien connue comme l'équation de Rayleigh et a toujours une racine différente de zéro. La racine non-nulle c_R est appelée la vitesse d'onde de surface (ou la vitesse d'onde de Rayleigh). Alors, les points singuliers vont apparaître au lieu des points qui vérifient :

$$\frac{|\omega - v k_1|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = c_R \quad (2.81)$$

Cette relation nous permet de calculer k_2 en fonction de k_1 comme suit :

$$k_2 = \pm \frac{k_1}{c_R} \sqrt{\left(\frac{\omega}{k_1} - v \right)^2 - c_R^2} \quad (2.82)$$

Rappelons que k_1 et k_2 sont réels. Donc, la condition d'existence de k_2 qui vérifie (2.81) implique :

$$\left| \frac{\omega}{k_1} - v \right| \geq c_R \quad (2.83)$$

Par ailleurs, les points qui vérifient $\kappa_s = 0$ sont aussi les racines de $D(k_1, k_2)$ (2.78). Ces points doivent être les racines d'une équation qui a la même forme que l'équation 2.81 :

$$\frac{|\omega - v k_1|}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = c_s \quad (2.84)$$

La condition d'existence de k_2 qui vérifie cette équation est : $\left| \frac{\omega}{k_1} - v \right| \geq c_s$.

En bref, $\hat{\mathbf{U}}(k_1, k_2)$ n'est pas du tout une fonction régulière. Elle a des points singuliers apparaissant pour plusieurs valeurs de k_1, k_2 :

- sur la ligne $k_1 = \omega/v, \forall k_2$.
- ensuite, il y a des possibilités d'avoir d'autres points singuliers qui dépendent des valeurs de ω et de v :
 - si $\omega \neq 0, v < c_R < c_s$: il y a des points singuliers sur deux couples de lignes qui sont limitées dans $k_1 \in [-\omega/(c_R - v), \omega/(c_R + v)]$ et $k_1 \in [-\omega/(c_s - v), \omega/(c_s + v)]$.

- si $\omega \neq 0$, $c_s > v > c_R$: il y a des points singuliers sur deux couples de lignes qui sont respectivement définies telles que $k_1 \in [-\infty, \omega/(c_R + v)] \cup [\omega/(v - c_R), +\infty]$ et $k_1 \in [-\omega/(c_s - v), \omega/(c_s + v)]$.
- si $\omega \neq 0$, $v > c_s > c_R$: il y a des points singuliers sur deux couples de lignes qui sont respectivement définies telles que $k_1 \in [-\infty, \omega/(c_R + v)] \cup [\omega/(v - c_R), +\infty]$ et $k_1 \in [-\infty, \omega/(c_s + v)] \cup [\omega/(v - c_s), +\infty]$

Une représentation des positions des points singuliers dans deux cas subsoniques et supersoniques est présentée dans la figure 2.3.

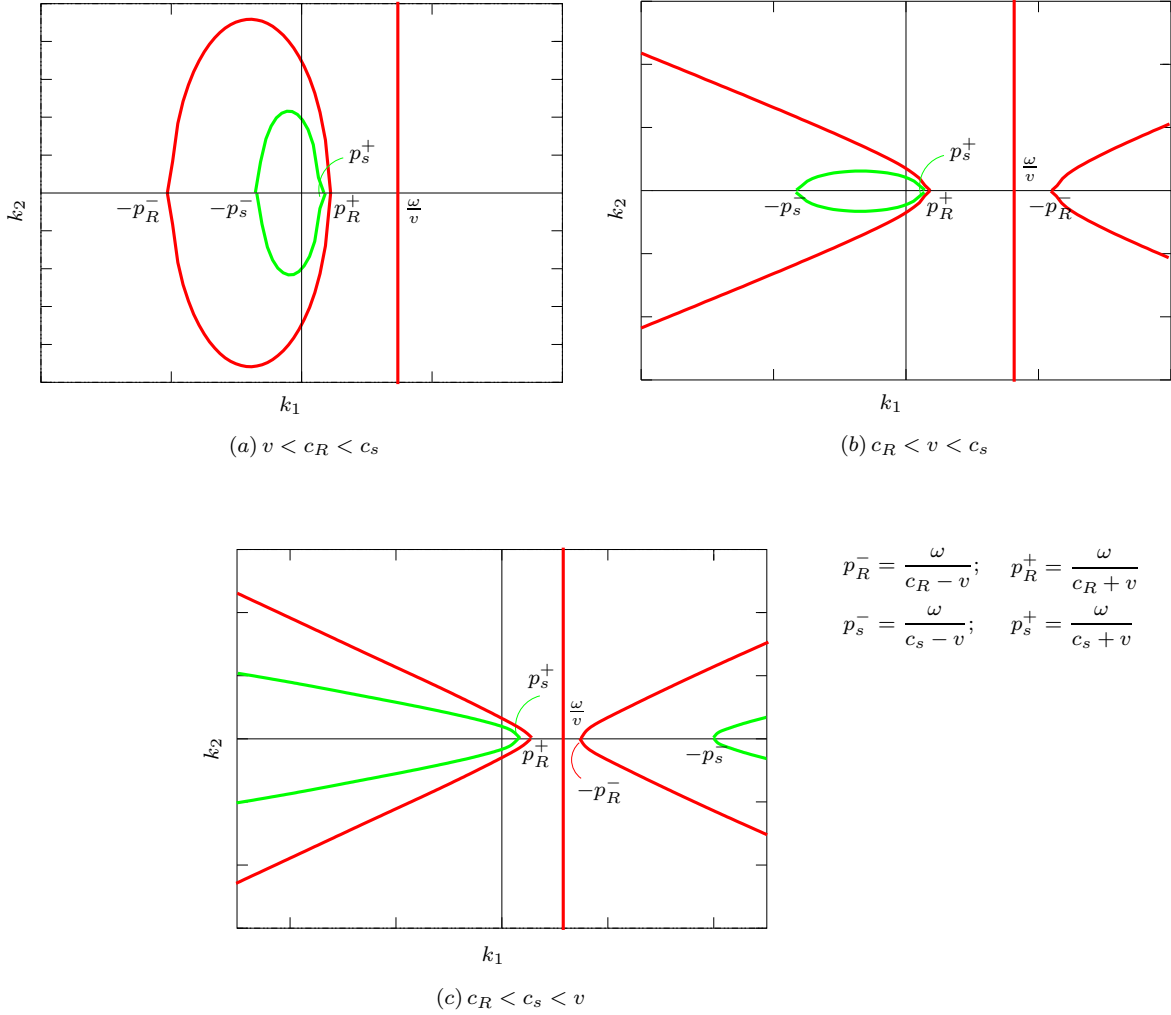


FIGURE 2.3. *Points singuliers dans les cas subsonique et supersonique*

REMARQUE 2.3.2

On peut en déduire facilement que dans le cas de la charge constante, i.e $\omega = 0$, les points singuliers se trouvent :

- sur la ligne $k_1 = 0$.
- si $v < c_R < c_s$: il n'y a pas d'autres points singuliers.
- si $c_s > v > c_R$: il y a des points singuliers sur les deux lignes droites $k_2 = \pm k_1 \sqrt{(v/c_R)^2 - 1}$.
- si $v > c_s > c_R$: il y a des points singuliers sur les quatre lignes droites $k_2 = \pm k_1 \sqrt{(v/c_R)^2 - 1}$ et $k_2 = \pm k_1 \sqrt{(v/c_s)^2 - 1}$.

Technique d'évaluation de la transformation de Fourier inverse

Il faudra calculer l'intégration de la transformation de Fourier inverse (2.13) pour déterminer la solution dans l'espace. En principe, la technique de transformation de Fourier rapide (FFT) [93] dans deux directions de k_1 , k_2 peut être utilisée mais avec beaucoup de points de calcul, surtout dans le cas supersonique (cela peut même dépasser la capacité de mémoire vive des machines). La solution est de prendre une intégration numérique en k_2 et la FFT en k_1 . Puisque les solutions (notées \hat{h}) dans le domaine des nombres d'onde sont très singulières, dans la mise en œuvre numérique, on a utilisé les techniques suivantes :

- Au point $k_1 = k_2 = 0$ où il y a toujours la singularité, la fonction $\hat{h}(0, 0)$ est prise comme la valeur moyenne \bar{h}_0 des points voisins. On évalue la partie au dessus (voir la figure 2.4) en utilisant la formulation d'intégration numérique de Gauss. Cette intégration sera ajoutée dans le résultat de la transformation de Fourier inverse avec \bar{h}_0 .

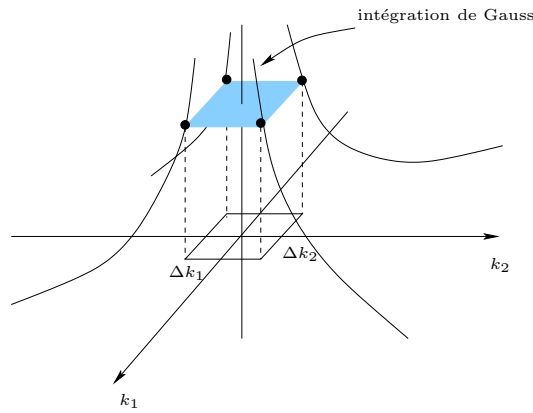


FIGURE 2.4.

- Aux points qui se trouvent sur la ligne $k_1 = \omega/v$, la fonction $\hat{h}(\omega/v, k_2)$ est calculée de façon approximative par :

$$\hat{h}(\omega/v, k_2) = \frac{1}{2}[\hat{h}(\omega/v - \varepsilon, k_2) + \hat{h}(\omega/v + \varepsilon, k_2)] \quad (2.85)$$

où ε est une petite perturbation et est prise égale à $10^{-3} \times \Delta k_1$.

- Pour l'intégration numérique en k_2 , on a choisi la formulation adaptative de Filon qui permet d'intégrer numériquement des fonctions du type sinusoïdal. La formulation détaillée est présentée dans l'annexe A.
- Pour les singularités aux points (k_1, k_2) vérifiant (2.82), on peut ajouter une petite viscosité dans le modèle en prenant un module élastique complexe qui s'exprime par :

$$E^* = E[1 + i\zeta \text{sign}(\omega - vk_1)] \quad (2.86)$$

où ζ désigne la viscosité. Ce coefficient de viscosité déplace les pôles de l'axe réel et la fonction dans l'intégration de la transformation est définie numériquement de façon normale.

REMARQUE 2.3.3

1. Dans le cas subsonique, les fonctions de $\hat{\mathbf{U}}$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sont assez régulières, l'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) dans deux dimensions (k_1, k_2) peut être utilisé avec un petit nombre de points. L'utilisation de la FFT dans ce cas est préférée comme elle est beaucoup plus rapide que celle qui utilise l'intégration numérique.

- On peut réduire le temps de calcul de l'intégration numérique de Filon dans la direction k_2 en remarquant que les composantes $u_1^1, u_3^1, u_2^2, u_1^3, \sigma_{13}^1, \sigma_{23}^2, \sigma_{33}^3, \sigma_{13}^3$ sont symétriques en fonction du nombre d'onde k_2 (on note $(.)^i$ la réponse due à la force qui s'applique suivant la direction i).
- Le module d'élasticité complexe s'écrit habituellement $E^* = E(1 + i\zeta)$ pour les équations vibratoires classiques dans le domaine des fréquences. Cependant, le module dans ce cas (2.86) dépend aussi du signe de $\omega - vk_1$. En fait, ce terme vient de la loi de comportement visco-élastique écrite dans le domaine des nombres d'ondes après un changement de variable. Considérons une relation de contrainte-déformation visco-élastique uniaxiale du type de Kelvin-Voigt suivante :

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (2.87)$$

Cette relation dans le repère mobile en remplaçant $\dot{\epsilon}$ par $v\epsilon_{,x}$ s'écrit : $\sigma = E\epsilon + \eta(i\omega\epsilon - v\epsilon_{,x})$ et sa transformation dans le domaine des nombres d'onde donne :

$$\hat{\sigma} = E\hat{\epsilon} + i\eta(\omega - vk_1)\hat{\epsilon} \quad (2.88)$$

on voit bien que le module d'élasticité est complexe et dépend strictement du signe de $(\omega - vk_1)$.

2.4 Validation et exemples numériques

2.4.1 Problème statique

Le premier test est pour valider la méthode de calcul dans le cas plus simple où on considère une force statique fixée s'appliquant sur la surface libre d'un demi-espace homogène. Ceci est appelé

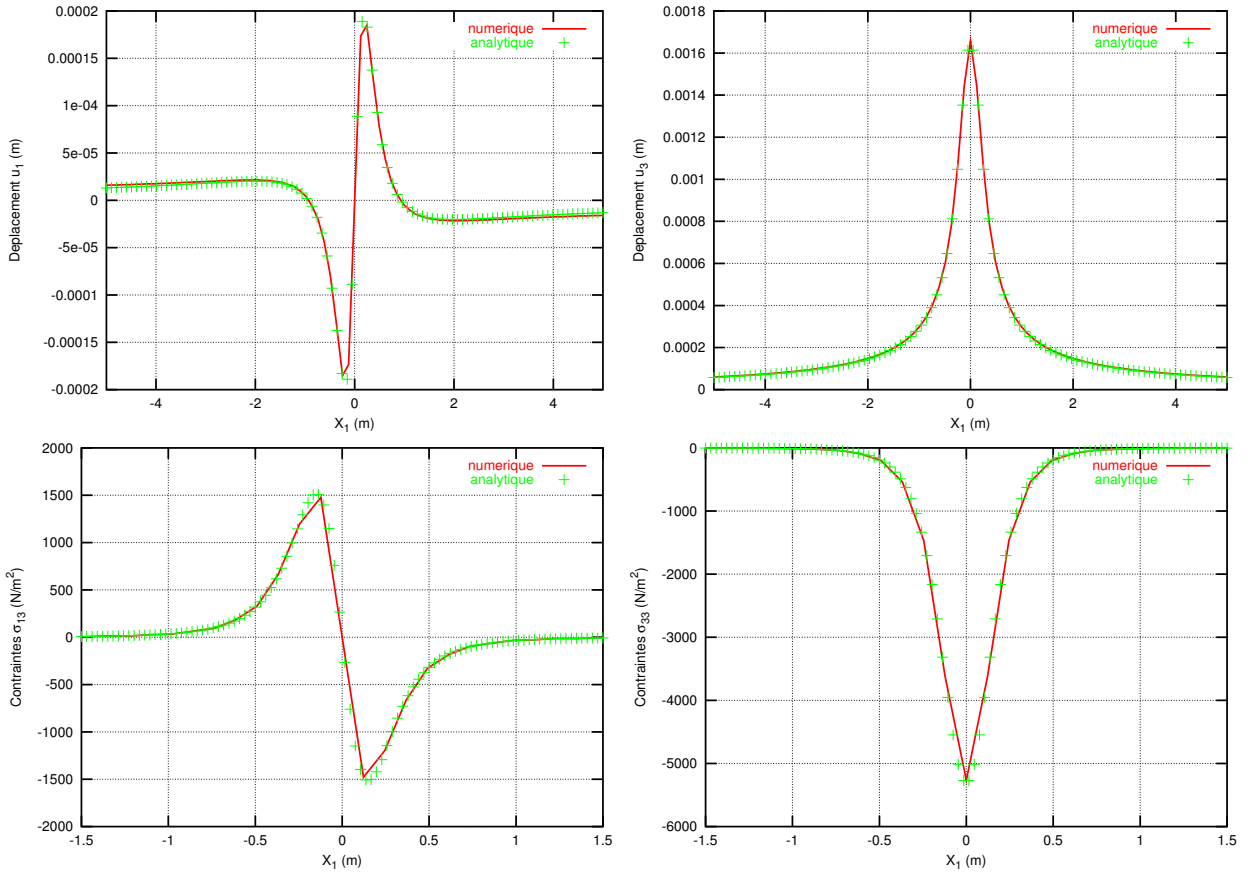


FIGURE 2.5. Comparaison des résultats numérique et analytique de déplacements et de contraintes dans le cas statique

le problème de Boussinesq et ses solutions sont données explicitement sous forme analytique (voir par exemple dans [56], chapitre 3).

Les caractéristiques physiques du milieu sont la masse volumique ρ de 1000 kg.m^{-3} , le module d'Young E de 50 MPa et le coefficient de Poisson ν de 0.3 . La force statique a une amplitude de 1000 N et applique verticalement sur la surface libre du milieu solide. A cause de la singularité qui apparaît quand la vitesse tend vers zéro, la force statique est simulée par une charge qui se déplace avec une très petite vitesse de 0.5 m.s^{-1} .

Les nombres d'échantillons dans les deux directions k_1, k_2 sont pris identiques $N_1 = N_2 = 256$ points et les pas d'échantillonnage sont $\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0.2$. Pour l'intégration numérique au voisinage de la force, on prend 7 points de Gauss.

On présente dans la figure 2.5 la comparaison entre les résultats numériques et analytiques. Les solutions comparées sont des déplacements (horizontaux et verticaux) et des contraintes (de cisaillement et normales) à la profondeur de $h = 0.3 \text{ m}$. Les résultats obtenus sont parfaitement identiques dans les deux cas.

On profite aussi de cet exemple pour voir l'effet de l'intégration par les points de Gauss au voisinage du point singulier $k_1 = k_2 = 0$. La différence entre deux calculs avec ou sans l'intégration de Gauss est présentée dans la figure 2.6.

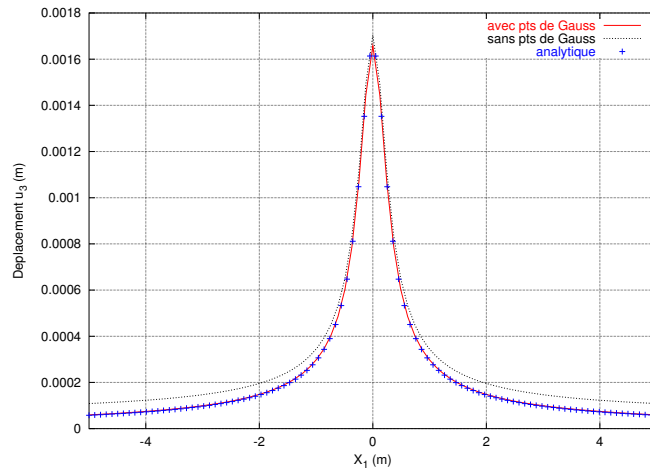


FIGURE 2.6. Effet de l'intégration avec points de Gauss

2.4.2 Problème d'un milieu homogène

On va considérer dans cet exemple le cas d'un demi-espace homogène. Les caractéristiques physiques de ce demi-espace sont présentées dans le tableau 2.1. Le problème est calculé d'abord avec une charge constante, puis avec une charge harmonique.

TABLEAU 2.1. Caractéristiques physiques du milieu solide

ρ (kg.m^{-3})	E (MPa)	ν	c_p (m.s^{-1})	c_s (m.s^{-1})	c_R (m.s^{-1})
1700	100	0.25	265.7	153.4	141

A. Charge constante

On applique une charge mobile dont l'amplitude est de 170 kN à différentes vitesses. En comparant aux vitesses des ondes de Rayleigh, de cisaillement et de compression (tableau 2.1), on va utiliser quatre valeurs de la vitesse de charge : 100 m.s^{-1} , 150 m.s^{-1} , 200 m.s^{-1} et 300 m.s^{-1} afin d'obtenir les cas subsonique, transonique et supersonique (ces quatre vitesses correspondent aux cas $v < c_R$, $c_R < v < c_s$, $c_s < v < c_p$ et $v > c_p$).

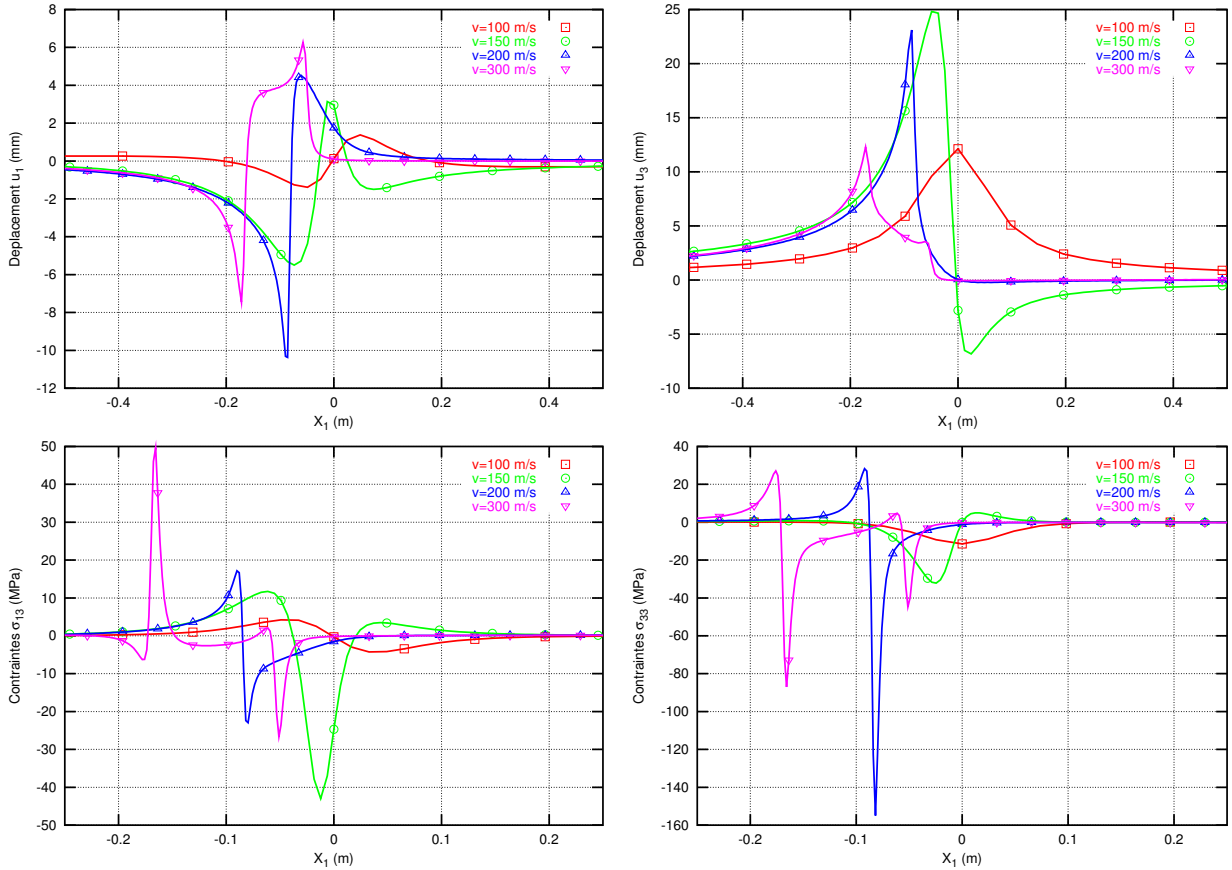


FIGURE 2.7. Comparaison des réponses d'un demi-espace homogène dues aux différentes vitesses.

La figure 2.7 présente les résultats des déplacements horizontaux et verticaux, aussi des contraintes normales et de cisaillement dûs aux différentes vitesses. Le profondeur de calcul est 0.1 m. Les paramètres de calcul comme le nombre des points pour la FFT, la fréquence "cut-off" des nombres d'onde ... sont choisis en fonction des valeurs des vitesses. Le coefficient de viscosité utilisé dans les cas transonique ou supersonique est de 2.5%.

On constate que les points maximums sont déplacés vers la gauche de la position de la charge quand la vitesse augmente. Les valeurs de déplacement et de contrainte sont plus élevées mais gardent toujours les mêmes formes par rapport à celles du cas statique. En revanche, dès que la vitesse de la charge dépasse la vitesse d'onde de surface, les formes sont vraiment changées. La réponse devant la force est de plus en plus diminuée et dans le cas supersonique ($v = 300 \text{ m.s}^{-1}$), il n'y a plus rien dans cette partie.

La réponse est plus importante dans les cas transoniques, surtout quand la vitesse de la charge

est au voisinage de la vitesse d'onde de Rayleigh. Quand $v = 200 \text{ m.s}^{-1}$, $c_s < v < c_p$, la réponse devant la force n'est due qu'aux ondes de compression qui se propagent radialement. C'est pourquoi les résultats de ce cas montrent qu'il y a presque uniquement le déplacement horizontal dans la zone $X_1 > 0$.

On visualise dans la figure 2.8 le déplacement vertical de la surface horizontale à la profondeur de 0.1 m dans deux cas subsonique et supersonique. La solution régulière en subsonique devient une fonction avec une surface d'onde de choc. On voit bien dans cette figure cette surface qui est appelée le *cône de Mach* dans la littérature.

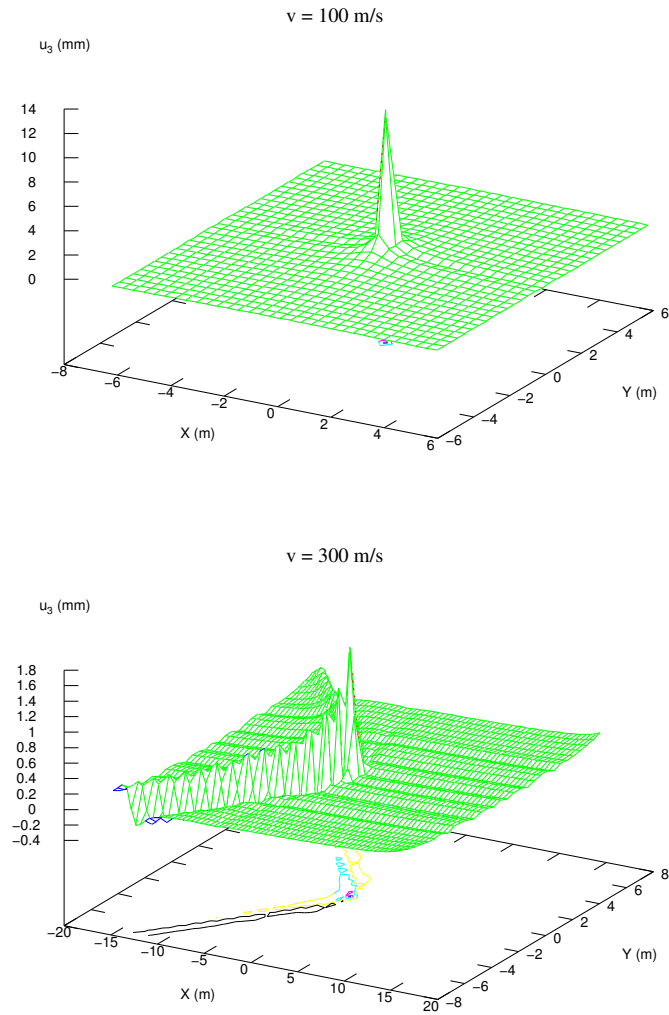


FIGURE 2.8. *Subsonique et supersonique*

La figure 2.9 présente les résultats d'accélération verticale. On peut constater que les valeurs maximums des accélérations deviennent très grandes (impossible dans la réalité) dans les cas supersoniques aux endroits où il y a des chocs. Ce problème vient de la singularité due à la force ponctuelle. On va voir après que les résultats peuvent être nettement améliorés en utilisant une charge de forme régulière (de type Gaussien).

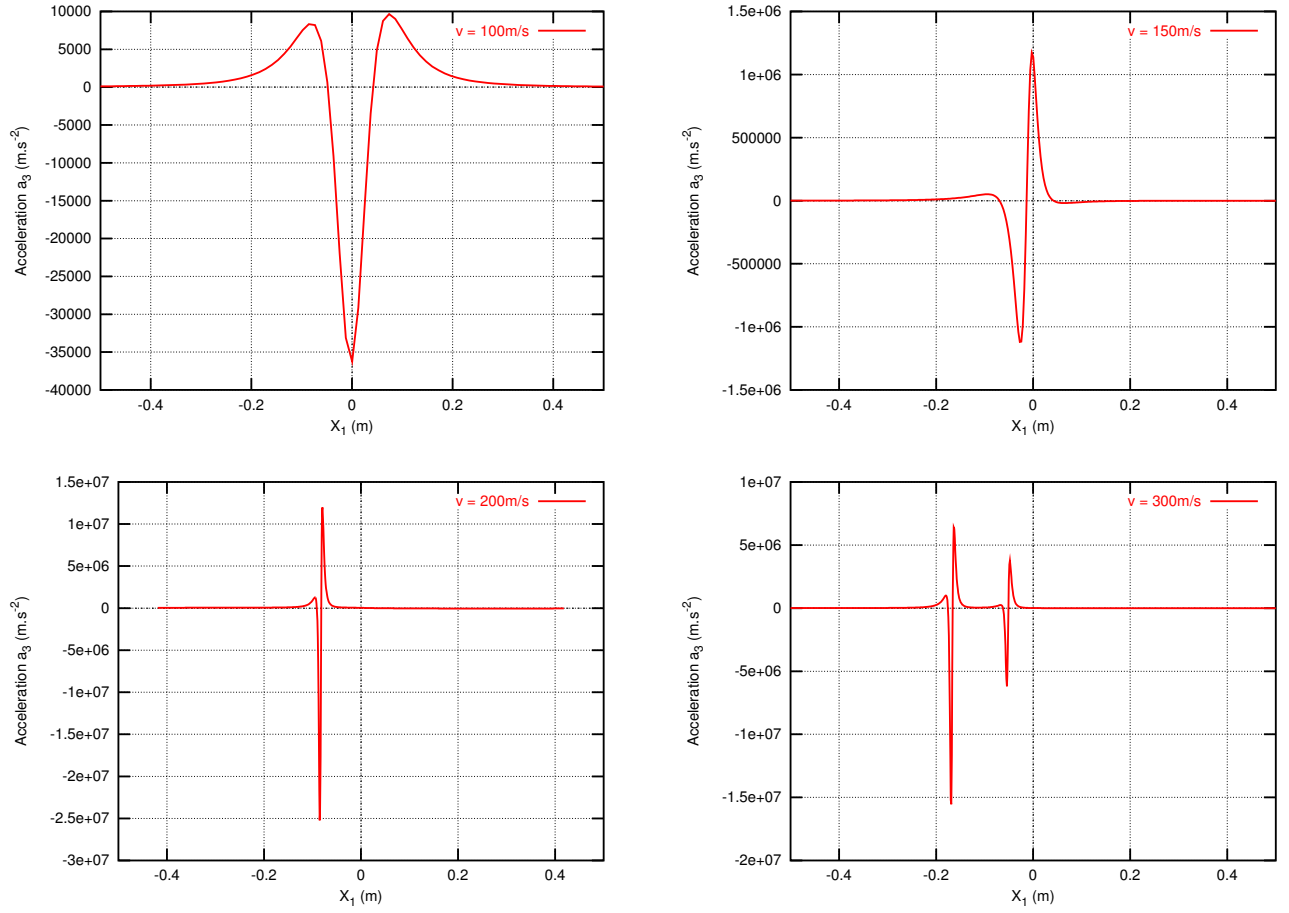


FIGURE 2.9. Accélération dues aux différentes vitesses

B. Charge harmonique

Le problème est considéré cette fois avec une charge mobile ponctuelle harmonique dont la fréquence est f_0 ($f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$). Les calculs sont réalisés avec différentes vitesses et fréquences de la charge pour voir ses influences sur le domaine. On présente ici seulement les solutions de déplacement vertical.

◦ *Effet des vitesses.* Une force harmonique de fréquence 20 Hz est utilisée dans le calcul pour les différentes vitesses de $v = 50, 100, 150, 200, 300 \text{ m.s}^{-1}$, les déplacements sont calculés à la profondeur 0.25 m .

Les solutions quand $v = 50$ et 100 m.s^{-1} présentées dans la figure 2.10 montrent bien *l'effet Doppler* où la vitesse de la charge change la fréquence de la propagation d'onde dans les deux parties : devant et derrière la force. Les longueurs d'onde changent strictement en fonction de la vitesse de charge.

◦ *Effet des fréquences.* On présente les résultats à la profondeur 0.05 m pour plusieurs valeurs de fréquences ($f_0 = 20, 50, 100, 200 \text{ Hz}$) dans deux cas : subsonique ($v = 100 \text{ m.s}^{-1}$) et supersonique ($v = 300 \text{ m.s}^{-1}$).

Les figures 2.11a,b montrent les résultats dans les échelles normales. Pour comparer les valeurs aux points maximums, on trace dans les figures 2.11c,d les déplacements en fonction d'un paramètre sans dimension défini par $\frac{X_1 f_0}{v}$ qui permet de placer les pics aux mêmes positions.

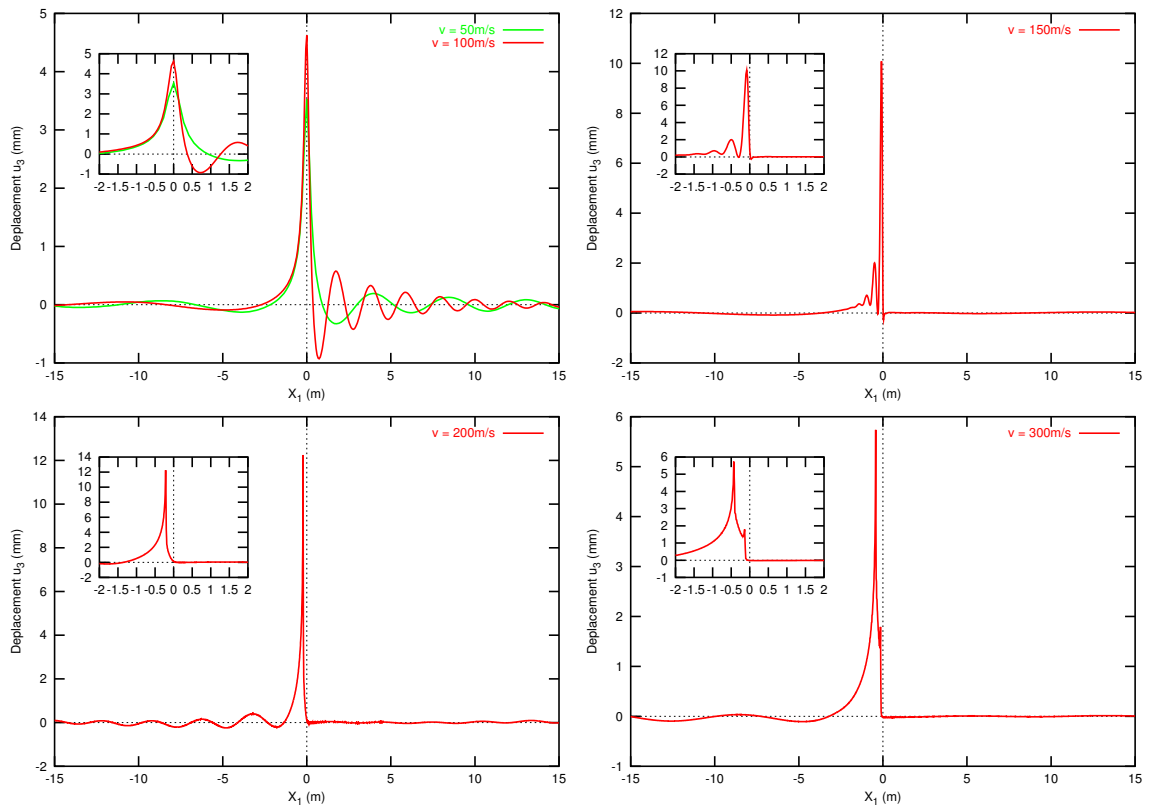


FIGURE 2.10. Comparaison des réponses d'un demi-espace homogène dues aux différentes vitesses.

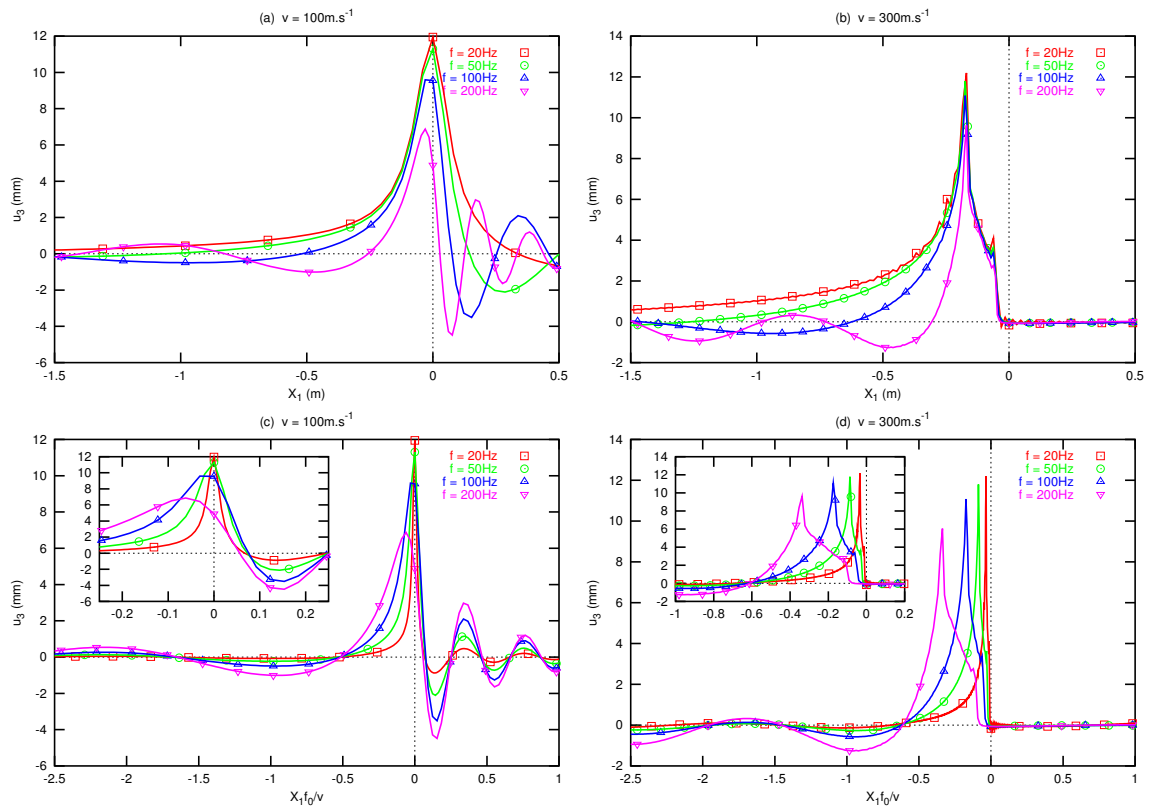


FIGURE 2.11. Effet des différentes fréquences

2.4.3 Problème d'un milieu multicouche

Cet exemple considère le cas où le milieu se compose de 2 couches de deux matériaux différents : la première est une couche d'épaisseur 30cm , la deuxième est un demi-espace infini. Les deux matériaux utilisés ici n'ont que les modules d'Young de différents. On note E_1 le module d'Young de la première couche et E_2 celui du demi-espace. On va considérer deux cas différents pour la relativité entre les rigidités de deux couches :

- (i) Une couche souple sur un demi-espace rigide : $E_1 = 100\text{ MPa}$, $E_2 = 200\text{ MPa}$.
- (ii) Une couche rigide posée sur un demi-espace souple : $E_1 = 200\text{ MPa}$, $E_2 = 100\text{ MPa}$.

Les caractéristiques qui correspondent à ces deux matériaux sont présentées dans le tableau 2.2.

TABLEAU 2.2. *Caractéristiques des deux couches*

ρ (kg.m^{-3})	E (MPa)	ν	c_p (m.s^{-1})	c_s (m.s^{-1})	c_R (m.s^{-1})
1700	100	0.25	265.7	153.4	141
1700	200	0.25	375.7	216.9	198.7

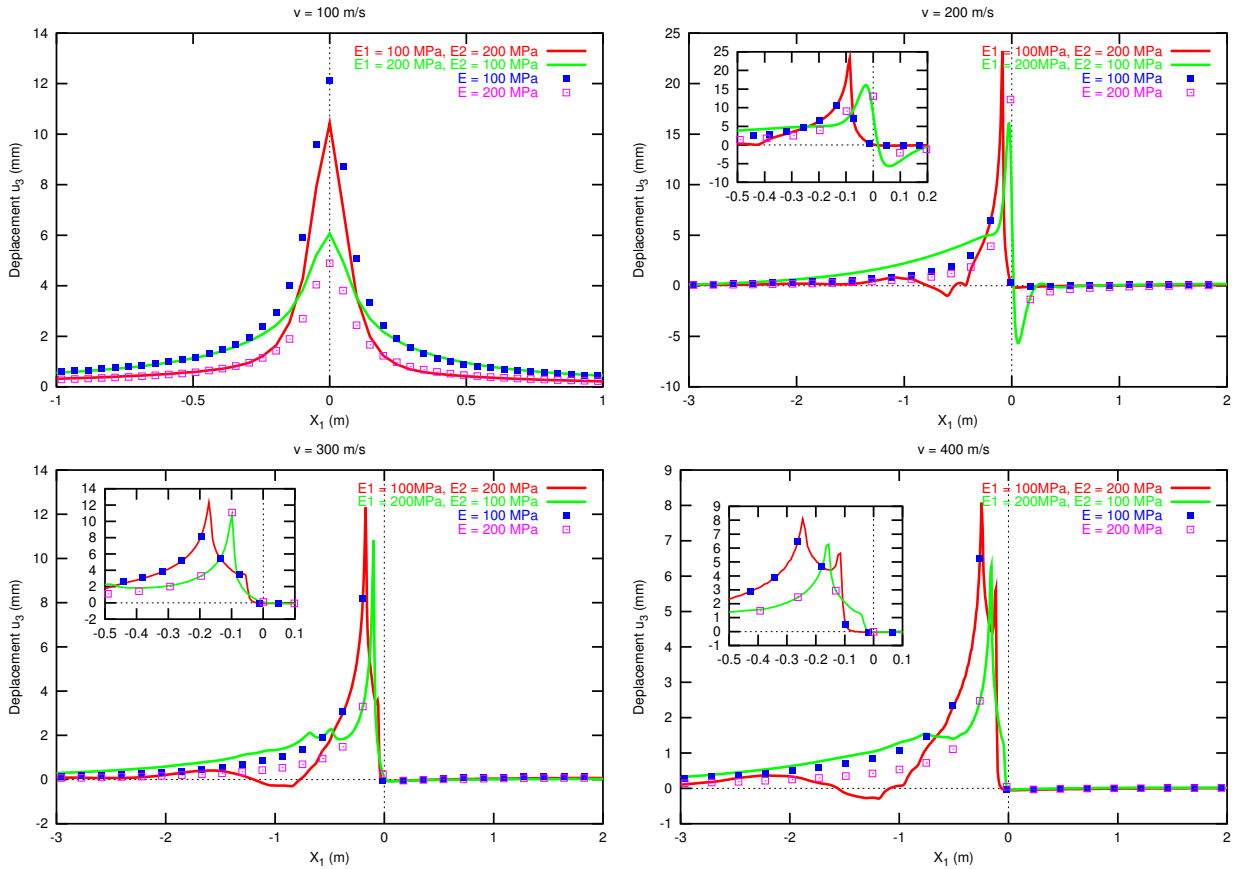


FIGURE 2.12. *Milieu à deux couches*

La figure 2.12 présente les solutions dans les deux cas en les comparant avec celles des deux cas de milieu homogène : $E = 100\text{ MPa}$ et $E = 200\text{ MPa}$. Les calculs sont réalisés pour 4 vitesses différentes : $v = 100, 200, 300, 400\text{ m.s}^{-1}$. Le paramètre évalué est le déplacement vertical dans la première couche à la profondeur 0.1 m .

On appelle les solutions des cas (i) et (ii) respectivement u_1 et u_2 et les solutions dans les cas de milieux homogènes ($E = 100, 200$ MPa) sont \bar{u}_1 et \bar{u}_2 . En regardant les résultats obtenus, on peut faire les remarques suivantes :

- Quand $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$, cette vitesse est subsonique pour les deux milieux. On constate que $u_1 < \bar{u}_1$ et $u_2 > \bar{u}_2$ au voisinage de la force mais $u_1 = \bar{u}_1$ et $u_2 = \bar{u}_2$ au loin.
- Quand $v = 200 \text{ m.s}^{-1}$:
 - o Pour le cas (i) : $c_s^1 < v < c_s^2$, $u_1 = \bar{u}_1$ au voisinage de la force.
 - o Pour le cas (ii) : $c_s^1 > v > c_s^2$, u_2 et \bar{u}_2 ont les mêmes formes mais avec différentes valeurs.
- Quand $v = 300 \text{ m.s}^{-1}$ ou $v = 400 \text{ m.s}^{-1}$: dans les deux cas, on a $u_1 = \bar{u}_1$ et $u_2 = \bar{u}_2$ au voisinage de la force. Les différences deviennent plus importantes au loin.

En bref, on peut dire que la réponse au voisinage de la force dans la première couche est un peu influencée par le demi-espace en dessous dans le cas subsonique. Au contraire, dans le cas supersonique, elle est presque identique par rapport à celle du cas homogène. Physiquement, c'est parce que dans le cas supersonique, les ondes réfléchies dues à la deuxième couche n'ont pas suffisamment de temps pour influencer les points au voisinage de la force.

2.5 Applications

On va traiter dans cette partie un problème avec le chargement d'un boggie qui se compose de deux essieux comme dans la figure 2.13. L'intérêt de ce calcul est de trouver les cas critiques où les accélérations sur la surface de la couche de ballast dépassent la gravité ce qui peut faire sauter les cailloux de la voie.

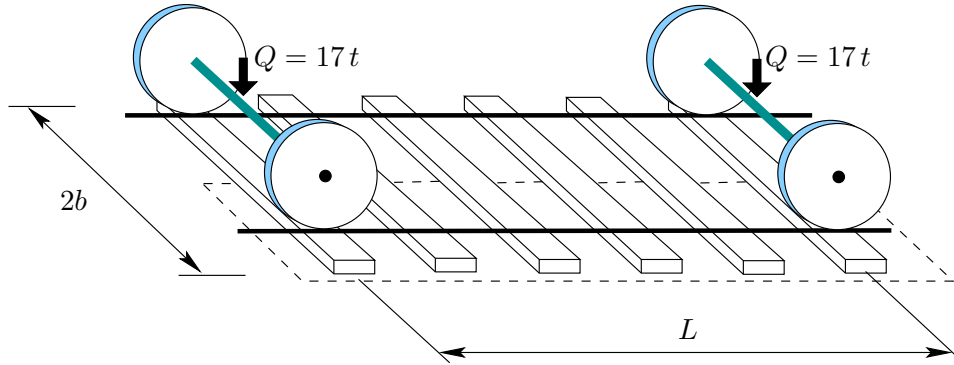


FIGURE 2.13.

Pour calculer la force, Alaoui et Naciri [4] ont proposé une formule analytique de la force verticale exercée par le rail sur un blochet (i.e. la force totale dans le rectangle pointillé dans la figure 2.13) lors du passage d'un boggie :

$$F(t, Q, V) = \frac{QY}{2} \left[X\left(\frac{Vt-a}{d}\right)^2 + X\left(\frac{Vt-a-L}{d}\right)^2 \right] \quad (2.89)$$

où : Q est la charge par essieu (N) qui vaut 17 tonnes, V est la vitesse du train (m.s^{-1}), t est le temps (s), d est la distance entre les traverses ($d = 0.6\text{m}$), a est une distance critique ($a = 3\text{m}$ qui est équivalent à $5d$), X, Y sont des variables sans dimension comprises entre 0 et 1 qui dépendent du module d'Young E_s du sol. Les valeurs de X et Y dépendantes du module d'Young du sol sont présentées dans le tableau 2.3.

TABLEAU 2.3. Valeurs des X et Y en fonction du module d'Young du sol

E_s (MPa)	10	30	60	80	100
X	0.82	0.715	0.64	0.625	0.61
Y	0.23	0.32	0.38	0.41	0.43

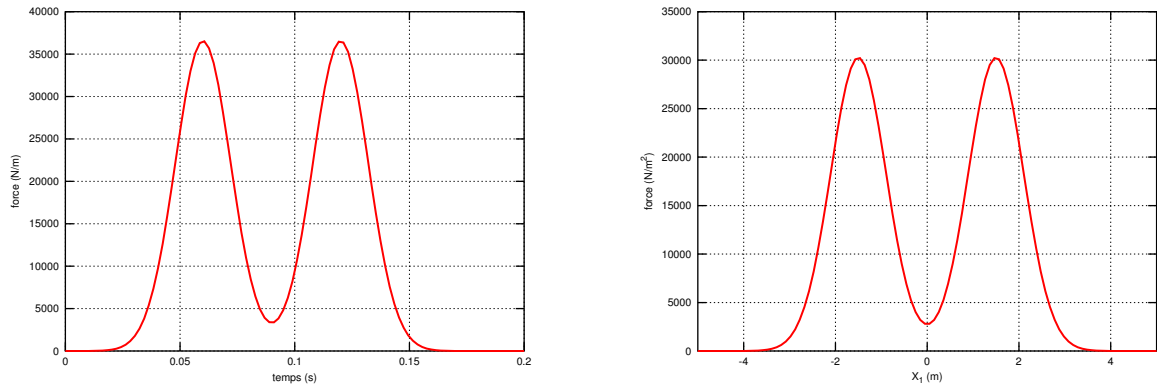
Supposons que la charge est répartie uniformément sur les traverses dont la largeur est $2b = 2.415m$, la charge en espace à chaque instant t peut être représentée par :

$$f(x_1, x_2, t) = \frac{QY}{2b} \left[X \left(\frac{Vt - x_1 - a}{d} \right)^2 + X \left(\frac{Vt - x_1 - a - L}{d} \right)^2 \right] H(b - |x_2|) \quad (2.90)$$

cette charge dans le repère mobile s'écrit :

$$f(X_1, X_2) = \frac{QY}{2b} \left[X \left(\frac{x_1 + \frac{L}{2}}{d} \right)^2 + X \left(\frac{x_1 - \frac{L}{2}}{d} \right)^2 \right] H(b - |X_2|) \quad (2.91)$$

La figure (2.14) montre les signaux de force en temps (2.89) et en espace (2.91) qui sont sous la forme d'une lettre M .

FIGURE 2.14. Signal de force en M

Le couplage entre le sol et le ballast est considéré comme une structure où il y a une couche d'épaisseur de $0.3m$ (pour le ballast) posée sur un demi-espace homogène (pour le sol). Cela conduit à un problème avec une distribution de charge mobile (Eq. 2.91) qui se déplace sur la surface d'un milieu à 2 couches. Il faut alors exprimer la formule analytique de la transformation de Fourier (2.12) du signal de la charge (2.91) :

$$\hat{f}(k_1, k_2) = 2QYd \sqrt{-\frac{\pi}{\ln X}} \exp \left(\frac{d^2 k_1^2}{4 \ln X} \right) \cos \left(\frac{k_1 L}{2} \right) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \quad (2.92)$$

On va présenter dans la suite seulement les solutions d'accélération verticale. Rappelons que la direction positive de l'axe vertical X_3 est vers en bas, la condition pour que les cailloux ne sautent pas est $a_{min} > -g$ où $g = 9.81$ est l'accélération de gravité.

2.5.1 Effet de la vitesse et de la fréquence

Considérons le cas où on a les modules d'Young du ballast (E_b) et du sol (E_s) respectivement de 200 MPa et 100 MPa. On présente dans la figure 2.15 les résultats des accélérations verticales à la profondeur $5cm$ dans les différentes situations de vitesse et aussi de fréquence.

Les figures 2.15a et 2.15b montrent que les accélérations augmentent rapidement en fonction de la vitesse et aussi de la fréquence du train. Avec la présence de la fréquence, les accélérations ne sont plus symétriques par rapport à la position de la force et l'influence de la fréquence est plus importante sur la partie droite de la charge.

On remarque aussi que dans ce cas où le signal de force est une fonction régulière, il n'y a plus de problème de points singuliers dus à la charge ponctuelle dans la solution en accélération (comme on a vu dans la figure 2.9).

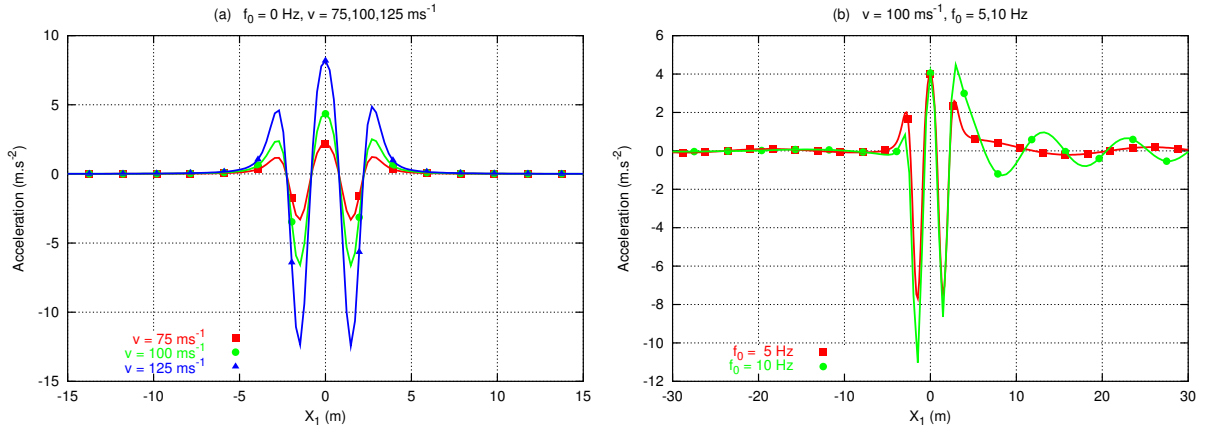


FIGURE 2.15. Accélération à la profondeur 5cm

2.5.2 Effet des couches

On réalise plusieurs calculs avec différentes caractéristiques physiques pour le ballast et le sol. La charge est constante. On choisit deux modules d'Young pour le ballast ($E_b = 100, 200 \text{ MPa}$) et trois modules d'Young pour le sol ($E_s = 60, 100, 150 \text{ MPa}$).

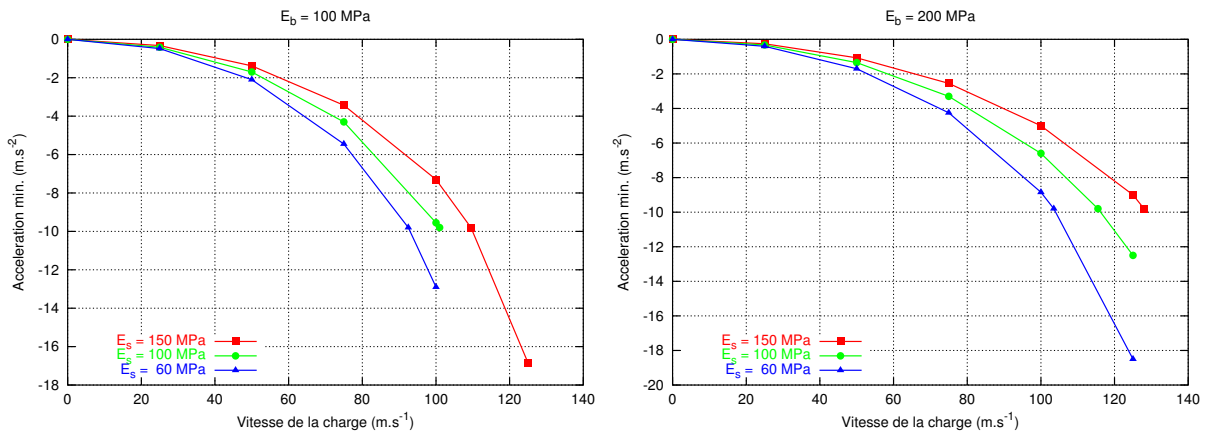


FIGURE 2.16. Accélérations minimums à la profondeur 5cm

Pour chaque cas de (E_b, E_s) , on peut déterminer les valeurs d'accélération minimum en fonction de la vitesse de la charge. Ces fonctions sont tracées dans la figure 2.16 qui montrent des croissances de type exponentiel des accélérations minimums quand la vitesse devient plus grande.

On peut déterminer aussi, pour chaque configuration de (E_b, E_s) , la vitesse où l'accélération minimum dépasse la gravité (qu'on appelle la vitesse critique). Ces valeurs critiques de vitesse (qui sont déjà converties en km/h) sont montrées dans le tableau 2.4.

TABLEAU 2.4. *Vitesses critiques en fonction du ballast et du sol*

E_b (MPa)	100			200		
E_s (MPa)	60	100	150	60	100	150
Vitesses critiques (km/h) \approx	333	363	394	373	416	461

Les résultats obtenus montrent que, avec le même module d'Young du ballast E_b , l'accélération minimum est plus importante si le sol est plus souple. Ceci vérifie le fait que le phénomène de guide d'onde est plus important si la rigidité relative entre le ballast et le sol est plus grande (il y a plus d'ondes fléchies dans ce cas). On voit bien aussi que les accélérations minimums sont plus faibles dans le cas où la raideur du ballast est petite avec le même sol.

2.6 Conclusion

Une méthode semi-analytique pour résoudre le problème linéaire de la propagation des ondes dans un milieu solide multicouche dues aux forces appliquées sur la surface en régime permanent est présentée dans cette partie. Les charges constantes ou harmoniques sont possibles. Un code de calcul a été aussi programmé en langage C++.

Les exemples numériques illustrent les réponses de différents milieux qui dépendent fortement de la vitesse et de la fréquence de la charge, et aussi de l'élasticité du milieu. Ils ont indiqué aussi que la charge ponctuelle n'est pas bonne pour décrire la charge réelle du train à cause de sa forme singulière. Il faudra utiliser un signal régulier pour éviter ce problème. Un signal de force en M a été utilisé pour tenir compte de la répartition de force du rail sur les blochets.

Pour un calcul plus détaillé, il faut poser un problème de couplage du milieu multicouche avec le rail (qui peut être modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko). En plus, la périodicité causée par les blochets peut avoir un rôle important et doit être ajoutée dans le modèle. La méthode semi-analytique présentée dans cette partie est toujours valable.

Cependant, cette méthode est limitée aux problèmes linéaires. C'est pourquoi, on n'approfondira pas l'étude de ce cas et on ne cherchera pas à inclure le rail et les blochets. Dans le cas non-linéaire, il faudra introduire des méthodes numériques, par exemple, la méthode des éléments finis. On va discuter ce problème dans les chapitres suivants.

Deuxième partie

**Modèles unidimensionnels
non-linéaires**

Chapitre 3

Milieu à comportement uniaxial soumis à une charge mobile

3.1 Introduction

3.1.1 Modèle simplifié du problème

Dans les études sur le problème dynamique des voies ballastées soumises aux passages des trains, la structure de couplage entre le ballast et le sol peut être considérée par un modèle simplifié où la voie ballastée est modélisée par une poutre nonlinéaire et la fondation (le sol) est modélisée par un système de ressorts-amortisseurs (la fondation de Winkler). La figure 3.1 représente une illustration de ce modèle simplifié avec une force mobile de vitesse constante v .

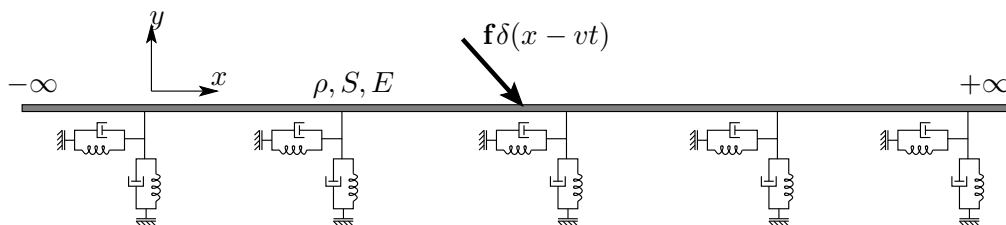


FIGURE 3.1. *Modèle d'une poutre soumise à une force mobile sur une fondation de Winkler*

On s'intéresse à l'influence de la nonlinéarité de cette poutre sur la réponse dynamique en régime stationnaire avec une vitesse de la charge constante. On s'intéresse aussi aux cas où la vitesse de la charge devient très grande ou éventuellement, aux cas supersoniques (quand la vitesse dépasse la célérité des ondes dans la poutre).

Dans un premier temps, on va simplifier encore le problème en tenant compte seulement de la composante horizontale de la force \mathbf{f} . On se ramène à un problème uniaxial où la poutre dans la figure 3.1 devient une barre et la partie verticale du système des ressorts-amortisseurs peut être supprimée (figure 3.2). Dans ce chapitre, on ne considère que ce cas plus simple parce que pour celui-ci, l'équation dynamique à résoudre devient une équation aux dérivées partielles d'une seule variable et on peut chercher des méthodes numériques performantes qui seront ensuite utilisées pour des problèmes plus compliqués (avec la poutre ou le milieu massif ...). En plus, on peut trouver la solution analytique, même dans le cas nonlinéaire pour pouvoir valider les résultats numériques obtenus. Le problème de la poutre en flexion soumise à une charge mobile sera considéré dans le chapitre suivant.

On va d'abord écrire les équations d'équilibre dynamiques transitoires et stationnaires de ce problème.

3.1.2 Equation transitoire

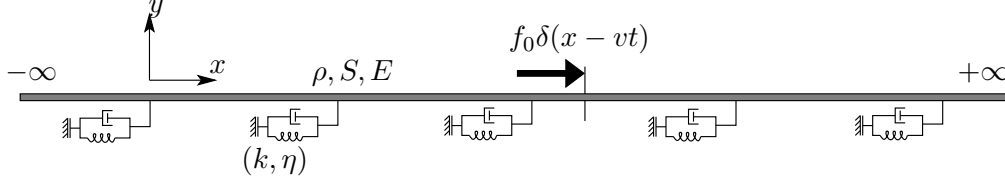


FIGURE 3.2. Problème d'une barre

On considère une barre soumise à une force axiale qui se déplace avec une vitesse v constante. Cette barre est tenue par un système uniforme de ressorts - amortisseurs (figure 3.2) dont la rigidité est $k > 0$ et l'amortissement est $\eta > 0$. L'équation d'équilibre dynamique en petite déformation à un point x en fonction du temps t s'écrit comme suit :

$$\rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - S \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} + ku(x, t) = f_0 \delta(x - vt) \quad (3.1)$$

où on désigne par ρ la masse volumique supposée constante, S la section de la barre, $u(x, t)$ le déplacement et $\sigma(x, t)$ la contrainte à (x, t) . La loi de comportement uniaxiale donne $\sigma = E\epsilon$ où E est le module élastique et ϵ est la déformation qui est définie par $\epsilon = \partial_x u$. Le problème dynamique transitoire est donné par :

$$\begin{aligned} \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + ku(x, t) &= f_0 \delta(x - vt) \\ u(-\infty, t) = u(+\infty, t) &= 0 \quad (\text{condition aux limites}) \\ u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0 \quad (\text{condition initiale}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La non-linéarité apparaît quand E est une fonction de la déformation. Ici, la non-linéarité de la barre est introduite par une loi de comportement du type *unilatéral linéaire*, i.e. on suppose que cette barre a deux rigidités différentes en compression et en traction :

$$\sigma = E_c \epsilon \quad \text{si} \quad \epsilon \leq 0 \quad (3.3)$$

$$\sigma = E_t \epsilon \quad \text{si} \quad \epsilon > 0 \quad (3.4)$$

où $E_c, E_t > 0$ sont deux constantes.

3.1.3 Equation stationnaire

Afin d'obtenir la solution en régime permanent de cette équation, on va effectuer le changement de variable : $x^* = x - vt$. La solution stationnaire devient statique en fonction de la nouvelle variable $u(x, t) = u^*(x^*)$ et de même pour ses dérivées $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x^*}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u^*(x^*)}{\partial x^{*2}}$. L'équation (3.2) se réduit à une équation statique :

$$-\frac{\partial}{\partial x^*} \left(S(E_{c,t} - \rho v^2) \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x^*} \right) - \eta v \frac{\partial u^*(x^*)}{\partial x^*} + ku^*(x^*) = f_0 \delta(x^*) \quad (3.5)$$

On remarque que la condition initiale n'est plus nécessaire pour le problème stationnaire. Pour simplifier la notation, les “*” sont supprimés dans les expressions suivantes. Le problème se ramène donc à résoudre l'équation différentielle stationnaire du 2^e ordre avec les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_{c,t} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) - \eta_v \frac{\partial u(x)}{\partial x} + k u(x) &= f_0 \delta(x) \\ u(-\infty) &= u(+\infty) = 0 \end{aligned}} \quad (3.6)$$

où $\chi_{c,t} = S(E_{c,t} - \rho v^2)$, $\eta_v = \eta v$.

On note que la variable χ peut aussi être représentée par $\chi_{c,t} = \rho S(c_{c,t}^2 - v^2)$, où $c_{c,t}$ sont les célérités des ondes de compression ou de traction :

$$c_{c,t} = \sqrt{\frac{E_{c,t}}{\rho}} \quad (3.7)$$

3.1.4 Méthodes de résolution numériques

Il y a deux méthodes numériques pour résoudre ce problème qui seront présentées dans les sections 3 et 4. La première est la méthode classique où l'équation transitoire (3.2) est résolue par la méthode des éléments finis en utilisant le schéma implicite de Newmark. La solution stationnaire sera obtenue après certains pas de temps de calcul.

La deuxième méthode est proposée pour pouvoir trouver directement la solution stationnaire comme un problème statique (3.6). La question est : *peut-on résoudre l'équation stationnaire (3.6) en utilisant la méthode des éléments finis ?* On constate que ça marche très bien dans le cas subsonique. En revanche, dans le cas supersonique, c'est à dire $\chi < 0$, la nature de l'équation (3.6) est changée. Elle devient une équation du type *hyperbolique* qui n'assure pas la positivité de la matrice de rigidité et la méthode des éléments finis usuelle n'est plus valable. Une autre équation stationnaire qui peut être appliquée avec la méthode des éléments finis sera introduite dans la section 4. Elle est déduite à partir de la discrétisation en temps de l'équation transitoire par la méthode α -généralisée.

3.2 Solution analytique du problème stationnaire

On cherche la solution de l'équation (3.6) sous la forme $u(x) = Ae^{\gamma x}$ en résolvant son équation caractéristique : $-\chi\gamma^2 - \eta_v\gamma + k = 0$ ce qui donne :

$$\gamma_1 = \frac{-\eta_v + \sqrt{\eta_v^2 + 4\chi k}}{2\chi} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-\eta_v - \sqrt{\eta_v^2 + 4\chi k}}{2\chi} \quad (3.8)$$

Sur les intervalles où $u'(x)$ est de signe constant, on peut représenter la solution $u(x)$ par :

$$u(x) = Ae^{\gamma_1 x} + Be^{\gamma_2 x} \quad (3.9)$$

Les inconnues A, B dans chaque intervalle sont déterminées à partir des conditions :

(i) la continuité de $u(x)$ et de sa dérivée :

$$\llbracket u(x) \rrbracket = 0 \quad \forall x \in [-\infty, +\infty] \quad (3.10)$$

$$\llbracket \chi(x) \partial_x u(x) \rrbracket = 0 \quad \forall x \in [-\infty, 0) \cup (0, +\infty] \quad (3.11)$$

(ii) la discontinuité de $\chi(x)\partial_x u(x)$ à $x = 0$:

$$\llbracket \chi \partial_x u(x) \rrbracket_{x=0} = \chi(0^+) \partial_x u(0^+) - \chi(0^-) \partial_x u(0^-) = -f_0 \quad (3.12)$$

(iii) $u(x)$ s'annule à l'infini : $u(+\infty) = u(-\infty) = 0$.

On note $\gamma_{1,2}$ de la même façon que $\chi : \gamma_{1,2}^{c,t} = \gamma_{1,2}(\chi_{c,t})$. On va chercher les solutions pour les différentes vitesses v (ou les χ). On suppose aussi que $E_c \geq E_t$ ($\chi_c \geq \chi_t$).

A. Cas 1 : $\chi_c \geq \chi_t > 0$.

Dans ce cas, $c_c \geq c_t > v$, la vitesse de la charge est subsonique par rapport aux deux types d'ondes. La solution $u(x)$ est sous la forme de deux fonctions exponentielles qui tendent vers zéro à l'infini :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= \frac{f_0}{\chi_t \gamma_1^t - \chi_c \gamma_2^c} \exp(\gamma_2^c x) & \text{si } x > 0 \\ u(x) &= \frac{f_0}{\chi_t \gamma_1^t - \chi_c \gamma_2^c} \exp(\gamma_1^t x) & \text{si } x \leq 0 \end{aligned}} \quad (3.13)$$

Démonstration.

Comme $c_c \geq c_t > v$, $\eta_v^2 + 4\chi k \geq 0$ et γ_1, γ_2 sont réels et $\gamma_1 > 0 > \gamma_2$ pour tout χ . La condition 3.11 montre que sur un intervalle ne contenant pas 0, la dérivée de $u(x)$ ne peut changer de signe qu'en passant en un point x_0 où $u'(x_0) = 0$. Si un intervalle $[x_0, x_1]$ est tel que $u'(x_0) = u'(x_1) = 0$, on a $u = 0$ sur cet intervalle. S'il n'existe qu'un seul point $x_0 \in]0, +\infty[$ ou $x_0 \in]-\infty, 0[$ où $u'(x_0) = 0$, la condition d'existence d'un point x_0 où la dérivée de $u(x)$:

$$u'(x) = A\gamma_1 \exp(\gamma_1 x) + B\gamma_2 \exp(\gamma_2 x) \quad (3.14)$$

s'annule est $AB > 0$ puisque $\gamma_1 \gamma_2 < 0$. Mais la fonction $u(x)$ qui vérifie cette condition tend vers $\pm\infty$ quand $x \rightarrow \infty$. Donc $u'(x)$ ne change pas de signe sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. La solution générale de $u(x)$ se représente par :

$$u(x) = Ae^{\gamma_1 x} + Be^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x \geq 0 \quad (3.15)$$

$$u(x) = Ce^{\gamma_1 x} + De^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x < 0 \quad (3.16)$$

La condition (iii) impose $A = D = 0$ et (i) ($\llbracket u(0) \rrbracket = 0$) nous donne : $B = C$. La solution $u(x)$ se simplifie en :

$$u(x) = Be^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x \geq 0 \quad (3.17)$$

$$u(x) = Be^{\gamma_1 x} \quad \text{si } x < 0 \quad (3.18)$$

Il nous reste une condition $\llbracket \chi(0) \partial_x u(0) \rrbracket = -f_0$ pour déterminer B :

$$\begin{aligned} B\chi(0^+)\gamma_2(0^+) - B\chi(0^-)\gamma_1(0^-) &= -f_0 \\ \Rightarrow B &= \frac{f_0}{\chi(0^-)\gamma_1(0^-) - \chi(0^+)\gamma_2(0^+)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

On peut voir immédiatement que $B > 0$ puisque $\chi > 0$ et $\gamma_1 > 0 > \gamma_2$. En conséquence :

$$\circ \partial_x u(0^+) = B\gamma_2 < 0 \Rightarrow \chi(0^+) = \chi_c \Rightarrow \gamma_1(0^+) = \gamma_1^c ; \gamma_2(0^+) = \gamma_2^c$$

$$\circ \partial_x u(0^-) = B\gamma_1 > 0 \Rightarrow \chi(0^-) = \chi_t \Rightarrow \gamma_1(0^-) = \gamma_1^t ; \gamma_2(0^-) = \gamma_2^t$$

Le coefficient B est donc complètement déterminé et on en déduit (3.13) \square

B. Cas 2 : $0 > \chi_c > \chi_t > -\frac{\eta_v^2}{4k}$

Dans ce cas, $v > c_c \geq c_t$, la vitesse de la charge est supersonique par rapport aux deux types d'ondes. La solution $u(x)$ est alors déterminée comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= 0 & x &\in [0, +\infty] \\ u(x) &= u_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\eta_v^2 + 4\chi_c k}} [\exp(\gamma_1^c x) - \exp(\gamma_2^c x)] & x &\in [x_0, 0] \\ u(x) &= u_1(x) = \frac{u_0}{\gamma_1^t - \gamma_2^t} \left[-\gamma_2^t \exp[\gamma_1^t(x - x_0)] + \gamma_1^t \exp[\gamma_2^t(x - x_0)] \right] & x &\in [-\infty, x_0] \end{aligned}} \quad (3.20)$$

où $x_0 = -\frac{\ln \gamma_1^c - \ln \gamma_2^c}{\gamma_1^c - \gamma_2^c} < 0$ et $u_0 = u(x_0)$.

Démonstration.

Comme $0 > \chi_c > \chi_t > -\frac{\eta_v^2}{4k}$, $\eta_v^2 + 4\chi_c k \geq 0$ et γ_1, γ_2 sont toujours réels. $\gamma_2^t > \gamma_1^t > 0$ et $\gamma_2^c > \gamma_1^c > 0$. On utilise les mêmes étapes que pour le cas précédent :

- Si $\exists [x_0, x_1] \subset (]-\infty, 0) \cup (0, +\infty[)$ tel que $u'(x_0) = u'(x_1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$ si $x \in [x_0, x_1]$ puisque γ_1, γ_2 sont réels.
- Si $\exists x_0 \in (0, +\infty[$ tel que $u'(x_0) = 0 \Rightarrow A = B = 0$ si $x \in [x_0, +\infty[$ car $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ et (iii) $\Rightarrow u(x) = 0$ si $x \in [x_0, +\infty[$.

\Rightarrow la dérivée $u'(x)$ ne change pas de signe dans $(0, +\infty[$ et il y a au maximum un point $x_0 \in]-\infty, 0)$ tel que $u'(x_0) = 0$. La solution générale $u(x)$ est donnée par :

$$u(x) = Ae^{\gamma_1 x} + Be^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x \geq 0 \quad (3.21)$$

$$u(x) = C_1 e^{\gamma_1 x} + D_1 e^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x \in [x_0, 0] \quad (3.22)$$

$$u(x) = C_2 e^{\gamma_1 x} + D_2 e^{\gamma_2 x} \quad \text{si } x \in [-\infty, x_0] \quad (3.23)$$

- $u(+\infty) = 0$ (iii) $\Rightarrow A = B = 0$ car $\gamma_1, \gamma_2 > 0 \Rightarrow u(x) = 0$ si $x > 0$.
- $u(0^+) = u(0^-) \Rightarrow C_1 = -D_1$.
- $[\chi(0)\partial_x u(0)] = -f_0 \Rightarrow -[C_1 \chi(0^-) \gamma_1(0^-) - C_1 \chi(0^-) \gamma_2(0^-)] = -f_0$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{f_0}{\chi(0^-)[\gamma_1(0^-) - \gamma_2(0^-)]} > 0 \quad \text{puisque } \chi < 0 \quad \text{et } \gamma_2 > \gamma_1.$$

Comme $\partial_x u(0^-) = C_1(\gamma_1 - \gamma_2) < 0 \Rightarrow$ au voisinage de $x = 0$, on a $\chi(0^-) = \chi_c$, $\gamma_1 = \gamma_1^c$, $\gamma_2 = \gamma_2^c$ et on peut en déduire :

$$\gamma_1^c - \gamma_2^c = \frac{\sqrt{\eta_v^2 + 4\chi_c k}}{\chi_c} \Rightarrow C_1 = \frac{f_0}{\sqrt{\eta_v^2 + 4\chi_c k}} \quad (3.24)$$

La fonction $u(x)$ dans l'intervalle $[x_0, 0]$ est donc déterminée par :

$$u(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\eta_v^2 + 4\chi_c k}} [\exp(\gamma_1^c x) - \exp(\gamma_2^c x)] \quad (3.25)$$

On rappelle que cette solution $u(x)$ est seulement valable pour la partie au voisinage du point $x = 0$ et qu'elle n'est plus valable si sa dérivée change de signe. Pour ce cas, on peut montrer facilement qu'il existe effectivement un point maximum qui se trouve à $x_0 = -\frac{\ln \gamma_1^c - \ln \gamma_2^c}{\gamma_1^c - \gamma_2^c} < 0$. La solution $u(x)$ à la gauche de x_0 est une fonction croissante qui s'exprime par :

$$u(x) = C_2 \exp(\gamma_1^t x) + D_2 \exp(\gamma_2^t x) \quad (3.26)$$

A partir des conditions $u(x_0) = u_0$ et $\partial_x u(x_0) = 0$, on déduit :

$$C_2 = -\frac{u_0 \gamma_2^t}{\gamma_1^t - \gamma_2^t} \exp[-\gamma_1^t x_0] \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{u_0 \gamma_1^t}{\gamma_1^t - \gamma_2^t} \exp[-\gamma_2^t x_0] \quad (3.27)$$

□

C. Cas 3 : $-\frac{\eta_v^2}{4k} > \chi_c > \chi_t$

La vitesse de charge est supersonique par rapport aux deux types d'ondes. On peut expliciter la solution générale dans ce cas comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= 0 & x \in [0, +\infty] \\ u(x) &= u_0(x) = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_c k|}} e^{\alpha_c x} \sin(\beta_c x) & x \in [x_1, 0] \\ u(x) &= u_k(x) = u_{k-1} e^{\alpha_a(x-x_{k-1})} \left\{ \cos[\beta_a(x-x_{k-1})] - \frac{\alpha_a}{\beta_a} \sin[\beta_a(x-x_{k-1})] \right\} \\ & & x \in [x_k, x_{k-1}] \quad ; \quad k = 2, 3, \dots, +\infty \end{aligned}} \quad (3.28)$$

où :

$$x_1 = -\frac{1}{\beta_c} \arctan\left(\frac{\beta_c}{\alpha_c}\right) \quad ; \quad u_1 = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_c k|}} e^{\alpha_c x_1} \sin \beta_c x_1 \quad (3.29)$$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{\pi}{\beta_a} \quad ; \quad u_k = -u_{k-1} e^{\pi \frac{\alpha_a}{\beta_a}} \quad (3.30)$$

$$\alpha_a = -\frac{\eta_v}{2\chi_a} \quad \text{et} \quad \beta_a = \frac{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_a k|}}{2\chi_a} \quad (3.31)$$

avec $a := t$ si k est pair et $a := c$ sinon

Démonstration.

Comme $-\frac{\eta_v^2}{4k} > \chi_c > \chi_t$, $\eta_v^2 + 4\chi k < 0$ et γ_1, γ_2 sont imaginaires. On va écrire γ_1 et γ_2 sous la forme : $\gamma_1 = \alpha + i\beta$ et $\gamma_2 = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = -\eta_v/2\chi > 0$ et $\beta = \sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi k|}/2\chi$.

Sur $]0, +\infty[$, si $[x_i, x_{i+1}]$ est un intervalle où $u'(x)$ est de signe constant avec $u'(x_i) = u'(x_{i+1}) = 0$, ces deux points sont deux racines de $u'(x) = 0$:

$$u'(x) = e^{\alpha x}[(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)A + iB(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x)] = 0 \quad (3.32)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\gamma + \beta x) = \frac{iA}{B} \quad \text{où} \quad \gamma = \arccos\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = x_i + \frac{\pi}{\beta} \quad (3.34)$$

On peut montrer que $|u(x_{i+1})| \geq |u(x_i)|$ comme $\alpha > 0$ et u_{i+1}, u_i ne peuvent pas tendre vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$. Donc, $A = B = 0$ dans cet intervalle.

S'il y a un seul point $x_0 \in]0, +\infty[$ où $u'(x_0) = 0$, $\Rightarrow A = B = \text{Cte}$ dans $[x_0, +\infty[\Rightarrow u(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ puisque $\alpha > 0 \Rightarrow u'(x)$ ne change pas de signe dans $]0, +\infty[$.

La solution générale $u(x)$ devient :

$$u(x) = e^{\alpha x} [Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}] \quad \text{si} \quad x \geq 0 \quad (3.35)$$

$$u(x) = e^{\alpha x} [C_k e^{i\beta x} + D_k e^{-i\beta x}] \quad \text{si} \quad x \in [x_{k+1}, x_k] \subset]-\infty, 0] \quad (3.36)$$

On peut déterminer les coefficients en utilisant les conditions (i),(ii),(iii) :

- $u(+\infty) = 0 \Rightarrow A = B = 0$ car $\alpha > 0$.
- $u(0^+) = u(0^-) \Rightarrow C_0 = -D_0 \Rightarrow u(x) = 2iC_0 e^{\alpha x} \sin \beta x$ si $x < 0$.
- $[\chi(0)\partial_x u(0)] = -f_0 \Rightarrow -2iC_0 \beta(0^-)\chi(0^-) = -f_0 \Rightarrow 2iC = \frac{f_0}{\beta(0^-)\chi(0^-)}$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi(0^-)k|}} e^{[\alpha(0^-)x]} \sin[\beta(0^-)x] \quad \text{puisque} \quad \beta = \sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi k|}/2\chi$$

$$\circ \partial_x u(0^-) = \frac{2f_0\beta(0^-)}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi(0^-)k|}} < 0 \text{ comme } \beta(0^-) < 0 \text{ donc :}$$

$$u(x) = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_c k|}} e^{\alpha_c x} \sin(\beta_c x) \quad (3.37)$$

La dérivée de cette fonction va changer de signe (compression \rightarrow traction) au point :

$$x = x_1 = -\frac{1}{\beta_c} \arctan\left(\frac{\beta_c}{\alpha_c}\right)$$

où la solution $u(x)$ a une valeur de :

$$u_1 = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_c k|}} e^{\alpha_c x_1} \sin \beta_c x_1$$

On peut continuer pour trouver facilement la solution dans la zone de traction à côté en écrivant les conditions de continuité au point x_1 ($u(x_1^-) = u_1$ et $\partial_x u(x_1) = 0$) et on obtient :

$$u(x) = u_1 e^{\alpha_t(x-x_1)} \left[\cos \beta_t(x-x_1) - \frac{\alpha_t}{\beta_t} \sin \beta_t(x-x_1) \right]$$

qui va atteindre un point minimum quand : $x = x_2 = x_1 + \frac{\pi}{\beta_t}$. La valeur de $u(x)$ à ce point x_2 est : $u_2 = -u_1 e^{\alpha_t(x_2-x_1)}$. \square

D. Cas 4 : $0 > \chi_c > -\frac{\eta_v^2}{4k} > \chi_t$

Comme dans le cas précédent, la vitesse de la charge dans ce cas est supersonique par rapport aux deux types d'ondes (traction et compression).

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= 0 & x &\in [0, +\infty] \\ u(x) &= u_0(x) = \frac{f_0}{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_c k|}} [\exp(\gamma_1^c x) - \exp(\gamma_2^c x)] & x &\in [x_0, 0] \\ u(x) &= u_1(x) = u_0 e^{\alpha_t(x-x_0)} \left\{ \cos [\beta_t(x-x_0)] - \frac{\alpha_t}{\beta_t} \sin [\beta_t(x-x_0)] \right\} & x &\in [x_1, x_0] \\ u(x) &= u_2(x) = -\frac{u_1}{\gamma_1^c - \gamma_2^c} [\gamma_2^c \exp(\gamma_1^c(x-x_1)) - \gamma_1^c \exp(\gamma_2^c(x-x_1))] & x &\in [-\infty, x_1] \end{aligned}} \quad (3.38)$$

$$\text{où : } \alpha_t = -\frac{\eta_v}{2\chi_t} \quad ; \quad \beta_t = \frac{\sqrt{|\eta_v^2 + 4\chi_t k|}}{2\chi_t}$$

$$x_0 = -\frac{\ln \gamma_1^c - \ln \gamma_2^c}{\gamma_1^c - \gamma_2^c} < 0 ; \quad x_1 = x_0 + \frac{\beta_t}{\pi} ; \quad u_0 = u_0(x_0) ; \quad u_1 = u_1(x_1)$$

Démonstration.

La solution de ce cas est déduite directement à partir des solutions du cas 2 et du cas 3 car les conditions sur χ_c et χ_t sont identiques aux cas 2 et 3, respectivement. La solution $u(x) = 0$ quand $x > 0$ est évidente. Si $x < 0$ la solution est déterminée à partir du point $x = 0$ de droite à gauche :

- $x \in [x_0, 0]$, la barre est en compression, la solution $u(x) = u_0(x)$ est la même que celle du cas 2.
- $x \in [x_1, x_0]$, on passe de la compression à la traction à partir de $x = x_0$, la solution $u(x) = u_1(x)$ est déterminée sous la forme de celle du cas 3.
- $x \in [-\infty, x_1]$, la barre revient en compression au point minimum $x = x_1$. La solution $u_2(x)$ est déterminée de façon similaire à la solution $u_1(x)$ sauf que l'onde considérée est en compression. La dérivée de cette solution ne change plus de signe jusqu'à $-\infty$ donc il n'a plus d'autres cas de solution.

\square

E. Cas 5 : $\chi_c > 0 > \chi_t > -\frac{\eta_v^2}{4k}$

On a un problème supersonique en traction et subsonique en compression.

Il n'y a pas de solution unique

Démonstration.

La vitesse de la charge est supersonique par rapport à c_t et est subsonique par rapport de c_c , alors $\eta_v^2 + 4\chi_{c,t}k \geq 0$. γ_1 et γ_2 sont donc toujours réels et on peut en déduire que $\gamma_2^t > \gamma_1^t > 0$ et $\gamma_1^c > 0 > \gamma_2^c$.

- $u(+\infty) = 0 \Rightarrow$ la solution à droite doit être en compression : $u(x > 0) = Ae^{\gamma_2^c x} \Rightarrow A > 0$ comme $u'(x > 0) = \gamma_2^c Ae^{\gamma_2^c x} < 0$.
- La solution à la gauche du point 0 est soit en compression soit en traction :
 - Si la solution reste en compression $u(0^-) = Be^{\gamma_1^c x}$ comme $u(-\infty) = 0$ et comme cette solution n'a aucun point minimum. La continuité au point $x = 0$ donne $B = A \Rightarrow u'(0^-) = A\gamma_1^c e^{\gamma_1^c x} > 0 \Rightarrow$ impossible.
 - Si la solution est en traction, elle s'écrit : $u(x) = Ce^{\gamma_1^t x} + De^{\gamma_2^t x}$. Les conditions de continuité nous donnent :

$$\begin{aligned} A &= C + D \\ \chi_c \gamma_2^c A - \chi_t (\gamma_1^t C + \gamma_2^t D) &= -f_0 \end{aligned}$$

On n'a que deux équations pour trois inconnues, donc le problème a *une infinité de solutions*. \square

On peut analyser cette solution plus en détail pour montrer que le coefficient A doit vérifier la condition suivante :

$$-\frac{f_0}{\chi_c \gamma_2^c} \leq A \leq -\frac{f_0}{\chi_c \gamma_2^c - \chi_t \gamma_2^t} \quad (3.39)$$

F. Cas 6 : $\chi_c > 0 > -\frac{\eta_v^2}{4k} > \chi_t$

Il n'y a pas de solution

Démonstration.

- $\eta_v^2 + 4\chi_c k \geq 0 \Rightarrow \gamma_1^c, \gamma_2^c$ sont réels et $\gamma_1^c > 0 > \gamma_2^c \Rightarrow u(x) = Ae^{\gamma_2^c x}$ si $x > 0$
- $\eta_v^2 + 4\chi_t k \leq 0 \Rightarrow \gamma_1^t, \gamma_2^t$ sont imaginaires.

La solution à la gauche du point $x = 0$ a donc la forme (voir le cas 3) :

$$u(x) = C_1 e^{\alpha_t x} \left[\cos \beta_t x - \frac{\alpha_t}{\beta_t} \sin \beta_t x \right] \quad (3.40)$$

Cette solution a toujours un point minimum $x = x_0$ où sa dérivée change de signe (traction \rightarrow compression). La solution $u(x)$ pour $x < x_0$ a donc forcément la forme suivante :

$$u(x) = C_2 e^{\gamma_1^c x} + D_2 e^{\gamma_2^c x} \quad (3.41)$$

Mais cette fonction ne peut pas s'annuler en 2 points différents \Rightarrow on ne peut pas avoir de solution dans ce cas. \square

Les illustrations pour les solutions analytiques dans les 6 cas considérés sont présentées dans la figure 3.3. Pour le cas 5, on trace deux solutions possibles.

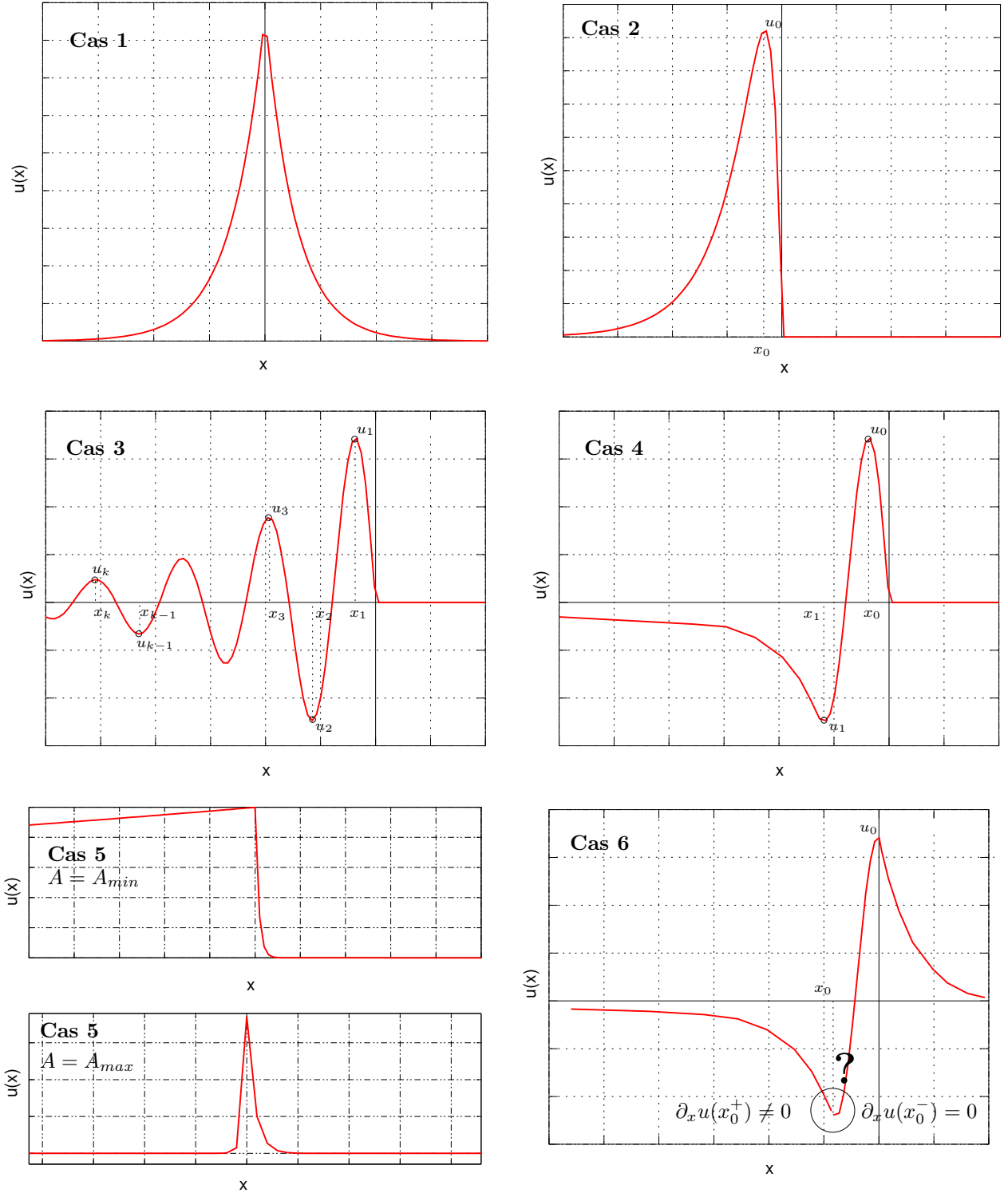


FIGURE 3.3. Solutions analytiques

REMARQUE 3.2.1

Les cas 5 et 6 montrent que les hypothèses utilisées dans ce chapitre ne sont pas encore suffisantes pour déterminer les régimes permanents dans ces situations quand la vitesse de la charge est entre les valeurs de c_c et c_t . Ces régimes permanents, s'ils existent, contiennent des ondes de choc qui doivent être étudiées en tenant compte aussi des équations en grande déformation écrites aux surfaces de discontinuité. Pour simplifier le problème, on se limitera à l'étude des non-linéarités matérielles provenant des lois de comportement et on n'étudiera pas les non-linéarités géométriques provenant de grandes déformations.

REMARQUE 3.2.2

Dans le cas linéaire, $E_c = E_t$, le problème se simplifie puisque les cas 4, 5, 6 n'existent plus. Les solutions $u(x)$ dans les trois premiers cas se simplifient comme suit :

1. Si $v < c$

$$u(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\eta^2 + 4\chi k}} e^{\gamma_1 x} \quad \text{si} \quad x < 0 \quad (3.42)$$

$$u(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\eta^2 + 4\chi k}} e^{\gamma_2 x} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad (3.43)$$

2. Si $v > c$ et $\eta^2 + 4\chi k \geq 0$

$$u(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\eta^2 + 4\chi k}} (e^{\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x}) \quad \text{si} \quad x < 0 \quad (3.44)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \quad (3.45)$$

3. Si $v > c$ et $\eta^2 + 4\chi k \leq 0$

$$u(x) = \frac{2f_0}{\sqrt{|\eta^2 + 4\chi k|}} e^{-\frac{\eta}{2\chi} x} \sin\left(\frac{\sqrt{|\eta^2 + 4\chi k|}}{2\chi} x\right) \quad \text{si} \quad x < 0 \quad (3.46)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > 0 \quad (3.47)$$

3.3 Solution numérique du problème transitoire

3.3.1 Procédure de calcul par la méthode des éléments finis.

On va chercher la solution du problème dynamique (3.2) par la méthode des éléments finis en dynamique classique [51][115]. La solution dans le régime permanent sera obtenue en passant le régime transitoire. On note $\Omega = [-L, L]$ le domaine de calcul en espace x et $T = [0, t_{max}]$ l'intervalle de calcul en temps. Le problème (3.2) est posé ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Chercher } u(x, t) : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \rho S \ddot{u}(x, t) + \eta \dot{u}(x, t) - (ES u'(x, t))' + ku(x, t) = f_0 \delta(x - vt) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times T \\ u(-L, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in T \\ u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.48)$$

où on a utilisé la notation \dot{u} , \ddot{u} pour les dérivées des 1^e et 2^e ordre en temps et u' pour la dérivée en espace.

Formulation variationnelle. On introduit les deux espaces des fonctions solutions et des fonctions tests :

$$\mathcal{U}_t = \{u(\cdot, t) \mid u(\cdot, t) \in H^1(\Omega), u(-L, t) = u(L, t) = 0\} \quad (3.49)$$

$$\mathcal{W} = \{w \mid w \in H^1(\Omega), w(-L) = w(L) = 0\} \quad (3.50)$$

La formulation variationnelle s'écrit alors :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Chercher } u(x) \in \mathcal{U}_t : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall w \in \mathcal{W} : \\ (\rho S \ddot{u}(x, t), w(x))_\Omega + (\eta \dot{u}(x, t), w(x))_\Omega + (ES u'(x, t), w'(x))_\Omega \\ \quad + (k u(x, t), w(x))_\Omega - (f_0 \delta(x - vt), w(x))_\Omega = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times T \\ u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Discrétisation par éléments finis. On va ensuite discrétiser le domaine Ω avec N^e éléments. Les approximations des fonctions $u(x, t)$ et w sont obtenues grâce aux fonctions d'interpolation :

$$u(x, t) = \sum_{I=1, n} \mathbf{N}_I(x) \mathbf{u}_I(t) \quad (3.52)$$

$$w(x) = \sum_{J=1, n} \mathbf{N}_J(x) \mathbf{w}_J \quad (3.53)$$

où n désigne le nombre total de noeuds, \mathbf{N} sont les fonctions d'interpolation, \mathbf{u} et \mathbf{w} sont les vecteurs des valeurs de $u(x, t)$ et $w(x)$ aux noeuds. On peut en déduire les approximations de la vitesse $\dot{u}(x, t)$ et de l'accélération $\ddot{u}(x, t)$:

$$\dot{u}(x, t) = \sum_{I=1, n} \mathbf{N}_I(x) \dot{\mathbf{u}}_I(t) \quad (3.54)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{I=1, n} \mathbf{N}_I(x) \ddot{\mathbf{u}}_I(t) \quad (3.55)$$

En appliquant ces approximations dans (3.51), le problème se réduit à un système linéaire d'équations aux dérivées partielles du 2^e ordre avec les conditions initiales :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r)\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (3.56)$$

$$\mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

où on appelle \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement, \mathbf{K}_b , \mathbf{K}_r les matrices de rigidité (de la barre et des ressorts, respectivement) qui sont définies par :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho S \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \quad ; \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega} \eta \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \quad (3.58)$$

$$\mathbf{K}_b = \int_{\Omega} ES \mathbf{N}_{,x}^t \mathbf{N}_{,x} dx \quad ; \quad \mathbf{K}_r = \int_{\Omega} k \mathbf{N}^t \mathbf{N} dx \quad (3.59)$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t f_o \delta(x - vt) dx \quad (3.60)$$

Discrétisation en temps. On va résoudre ce système en utilisant le schéma de Newmark classique. Le schéma de Newmark est une méthode "d'un pas" qui permet d'évaluer implicitement la solution au temps t_{n+1} à partir de celle à t_n :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(t_{n+1}) \approx \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.61)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}(t_{n+1}) \approx \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \beta_1) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta_1 \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3.62)$$

où $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ et \mathbf{u}_{n+1} , $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$, $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ vérifient le système d'équations :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r)\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

On va présenter les procédures pour résoudre ce problème dans deux cas : linéaire et non linéaire.

A. Problème linéaire.

Remplaçons (3.61)(3.62) dans (3.63), les inconnues \mathbf{u}_{n+1} et $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ s'éliminent et l'accélération à l'instant t_{n+1} peut être exprimée en résolvant un système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = & - \left[\mathbf{M} + \beta_1 \Delta t \mathbf{C} + \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r) \right]^{-1} \times \left\{ -\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{C} [\dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \beta_1) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n] \right. \\ & \left. + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r) \left[\mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{(1 - \beta_2) \Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Une fois que le vecteur d'accélération $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ est déterminé, le déplacement et la vitesse sont calculés directement à partir de (3.61)(3.62).

B. Problème nonlinéaire.

En connaissant \mathbf{u}_n , $\dot{\mathbf{u}}_n$, $\ddot{\mathbf{u}}_n$, la solution à l'incrément suivant $(n+1)$ ne peut plus être calculée de façon directe comme pour le cas linéaire (3.65) mais doit être déterminée par une procédure itérative. On va rappeler la méthode itérative de Newton-Raphson pour ce problème.

On initie la solution pour l'incrément $(n+1)$ en choisissant $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n$. La vitesse et l'accélération qui correspondent à cette valeur de $\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}$ sont :

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)} = \left(1 - \frac{2\beta_1}{\beta_2}\right) \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (3.66)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)} = -\frac{2}{\beta_2 \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{1}{\beta_2}\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (3.67)$$

A chaque itération (k) , on peut évaluer le vecteur résidu du système par :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_r)\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{f}_{n+1}^{(k)} \quad (3.68)$$

On linéarise le résidu de l'itération suivante $k+1$ qui doit être nul :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}}\right) \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

et l'incrément de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}$ entre deux itérations $(k, k+1)$ s'exprime par :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = - \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}} \right]^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \quad (3.70)$$

Il nous faut déterminer la dérivée de $\mathbf{R}_{n+1}^{(k)}$. A partir de (3.61)(3.62), on a :

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} \quad (3.72)$$

On dérive (3.68) et on obtient la matrice tangente de rigidité $\mathbf{K}_t^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}}$ comme suit :

$$\mathbf{K}_t^{(k)} = \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}_{bt}^{(k)} + \mathbf{K}_r \quad (3.73)$$

La mise à jour des solutions dans la nouvelle itération $(k+1)$ est calculée par :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \quad (3.74)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} + \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \quad (3.75)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} + \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \quad (3.76)$$

REMARQUE 3.3.1

1. Si on utilise des éléments linéaires à deux noeuds, le vecteur d'interpolation d'un élément $[x_i, x_{i+1}]$ est : $\mathbf{N} = \langle \frac{x_{i+1}-x}{h}, \frac{x-x_i}{h} \rangle$. Dans le cas linéaire, les matrices élémentaires \mathbf{M}^e , \mathbf{C}^e , \mathbf{K}_b^e , \mathbf{K}_r^e sont explicitées par :

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho Sh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}^e = \frac{\eta h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}_r^e = \frac{kh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Dans le cas nonlinéaire, \mathbf{K}_b^e doit être recalculé à chaque itération (k) car il dépend de E : $E = E_c$ si $\epsilon^{(k)} \leq 0$ et $E = E_t$ sinon où la déformation $\epsilon^{(k)}$ est déterminée par :

$$\epsilon^{(k)} = \mathbf{N}_{,x}^{(e)} \mathbf{u}^{e(k)} = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) \quad (3.79)$$

2. Les paramètres β_1, β_2 sont choisis selon les cas de calcul. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, on a un schéma explicite et si $\beta_1 = \beta_2 = 1$ le schéma devient implicite total. Il est bien connu que la condition pour que le schéma de Newmark soit stable inconditionnellement est $\beta_2 \geq \beta_1 \geq 0.5$. Pour des β_1, β_2 quelconques, il faudra choisir le pas de temps Δt suffisamment petit pour avoir la stabilité.

3.3.2 Validation numérique

On va calculer quelques exemples numériques du problème d'une barre soumise à une force constante qui se déplace avec différentes vitesses. La barre est fixée aux deux extrémités et sa longueur varie selon les cas de calcul de telle façon qu'elle peut représenter une barre infinie. Les caractéristiques physiques et géométriques qui représentent une structure de ballast-sol sont données dans le tableau 3.1. On note que la rigidité du sol (k) est déterminée par l'inverse du

TABLEAU 3.1. Paramètres de la structure

Masse volumique du ballast (ρ)	1800 kg.m ⁻³
Module d'Young de ballast (E)	200 MPa
Module d'Young de ballast en tension (pour le cas nonlinéaire)	20 MPa
Aire de la section de ballast (S)	1.2 m ²
Rigidité de sol (dont le module d'Young est 100 MPa) (k)	5.0×10^7 N.m ⁻²
Coefficient d'amortissement (η)	0.2% k
Amplitude de la charge (f_0)	1700 N

déplacement moyen à la surface d'un demi espace homogène (dont $E = 100$ MPa) soumis à une force unité tangente uniforme appliquée sur une région de sa surface (dont le diamètre est égal à la largeur de la couche de ballast). La valeur de la charge utilisée dans le calcul est prise égale à 1/10 de l'amplitude de la charge verticale (17 tonnes) des essieux sur la voie. On va considérer dans un premier temps le cas linéaire et ensuite le cas nonlinéaire. Dans les deux cas, la force est déplacée à partir d'une certaine position dans la barre jusqu'à la position où le problème devient en régime permanent. Ces résultats finaux en régime permanent seront comparés avec les solutions analytiques présentées dans la section 2.

A. Problème linéaire

Le module d'Young de la barre est constant $E = 200 \times 10^6$ N.m⁻². La vitesse critique correspondant à ce module élastique vaut : $c \approx 333$ m.s⁻¹. Les paramètres du calcul numérique sont donnés dans le tableau 3.2.

TABLEAU 3.2. Paramètres de calcul pour le cas linéaire

	Cas subsonique	Cas supersonique
Vitesse v	80 m.s ⁻¹	400 m.s ⁻¹
Longueur de la barre L	[-20m, 20m]	[-50m, 50m]
Nombre d'éléments N^e	80	200
Position initiale de la force	$x_i = -8$ m	$x_i = -35$ m
Position finale de la force	$x_f = 8$ m	$x_f = 35$ m
Pas de temps Δt	7.5×10^{-4} s	6.25×10^{-4} s
Nombre de pas de temps	266	280
Intervalle de temps	0.1955 s	0.175 s
β_1	0.5	0.5
β_2	0.5	0.5

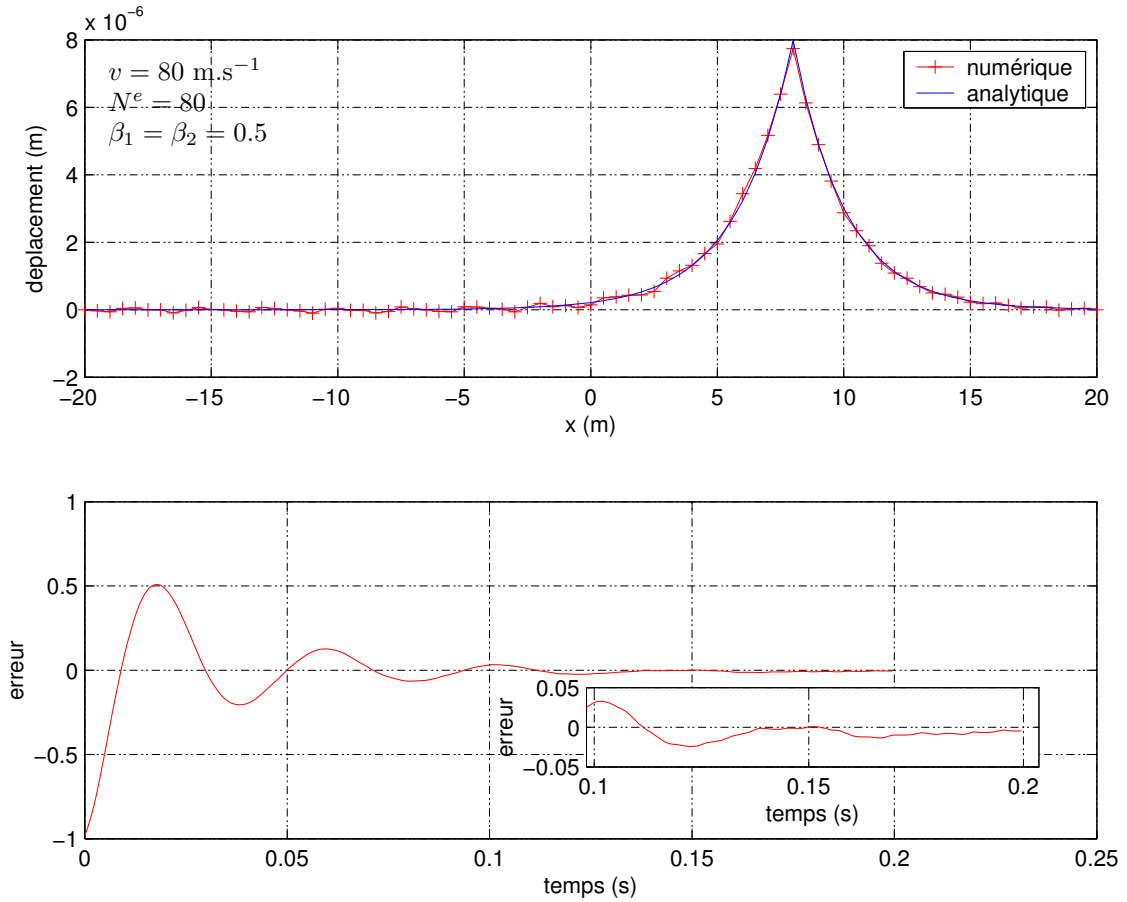


FIGURE 3.4. Solution transitoire du problème linéaire en subsonique

Les résultats numériques sont présentés dans les figures (3.4) et (3.5) en comparant avec les courbes analytiques à la fin du calcul. Les différences entre la solution transitoire et la solution analytique stationnaire sont aussi tracées pour voir si on est déjà dans le régime stationnaire. Cette erreur est exprimée simplement par :

$$e = \frac{\left(\sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i(t) - u_{analytique}(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=1}^N |u_{analytique}(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.80)$$

Les pas de temps pour les calculs sont choisis tels que la charge ne peut pas se mouvoir plus loin que la taille d'un élément durant un pas de temps. Pour les exemples présentés ici, on utilise un pas de temps Δt qui vaut :

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{h}{\max(v, c)} \quad (3.81)$$

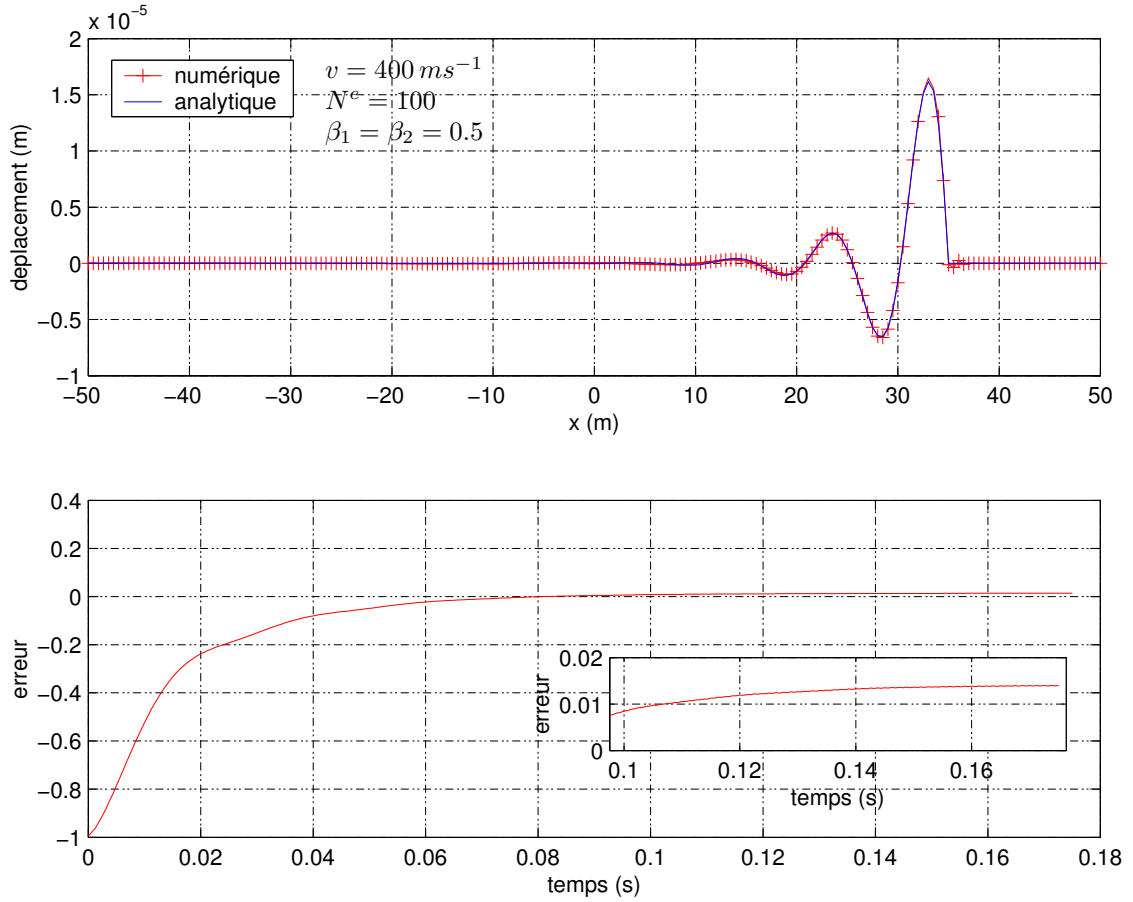


FIGURE 3.5. Solution transitoire du problème linéaire en supersonique

B. Problème nonlinéaire

La barre se comporte avec deux modules élastiques différents : $E_c = 200 \times 10^6 \text{ N.m}^{-2}$ pour la compression et $E_t = 20 \times 10^6 \text{ N.m}^{-2}$ pour la traction. Les vitesses critiques correspondant à ces deux modules sont $c_c = 333.3 \text{ m.s}^{-1}$ et $c_t = 105.4 \text{ m.s}^{-1}$. Les paramètres de calcul utilisés sont donnés dans le tableau 3.3. Les résultats sont présentés dans les figures (3.6) et (3.7). La différence entre les deux pentes de déplacement en compression et traction dans le cas subsonique (3.6) montre bien l'effet de la rigidité unilatérale.

Sur la figure (3.7), la courbe en pointillée représente la solution du cas linéaire pour $E = E_c$. On constate que les parties des solutions qui se trouvent devant la force sont identiques. La solution qui est derrière la force dans le cas nonlinéaire est plus “basse fréquence” par rapport à celle du cas linéaire. On constate que pour le cas supersonique, on a besoin de 280 incréments de pas de temps pour dépasser le régime transitoire et dans chaque incrément on doit réaliser une procédure itérative s'il y a une nonlinéarité (avec 2 ou 3 itérations pour notre exemple). Le coût du calcul

TABLEAU 3.3. Paramètres de calcul pour le cas nonlinéaire

	Cas subsonique	Cas supersonique
Vitesse v	80 m.s ⁻¹	400 m.s ⁻¹
Longueur de la barre L	[-20m, 20m]	[-50m, 50m]
Nombre d'éléments N^e	160	200
Pas de temps Δt	3.125×10^{-3} s	6.25×10^{-4} s
Nombre de pas de temps	96	280
Intervalle de temps	0.3 s	0.175 s
Position initiale de la force	$x_i = -8$ m	$x_i = -35$ m
Position finale de la force	$x_f = 8$ m	$x_f = 35$ m
β_1	1.0	0.5
β_2	1.0	0.5

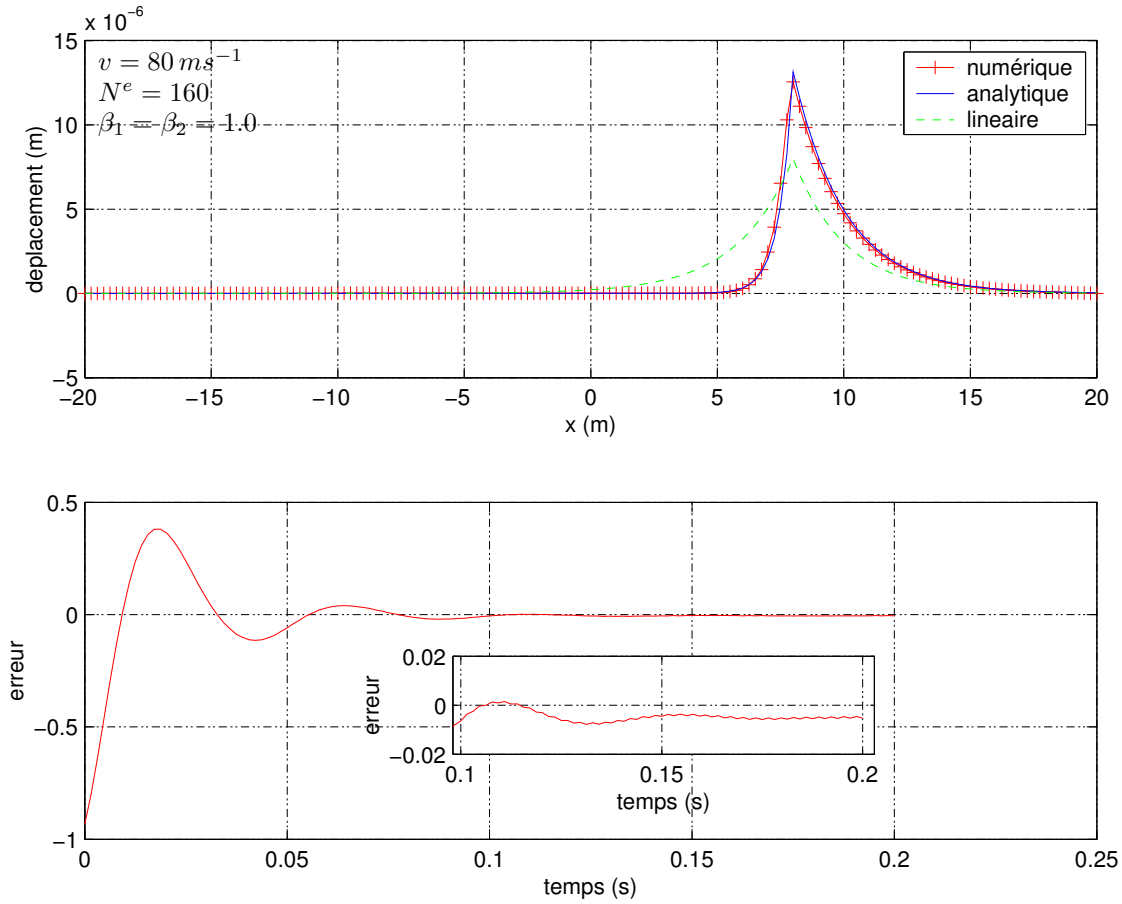
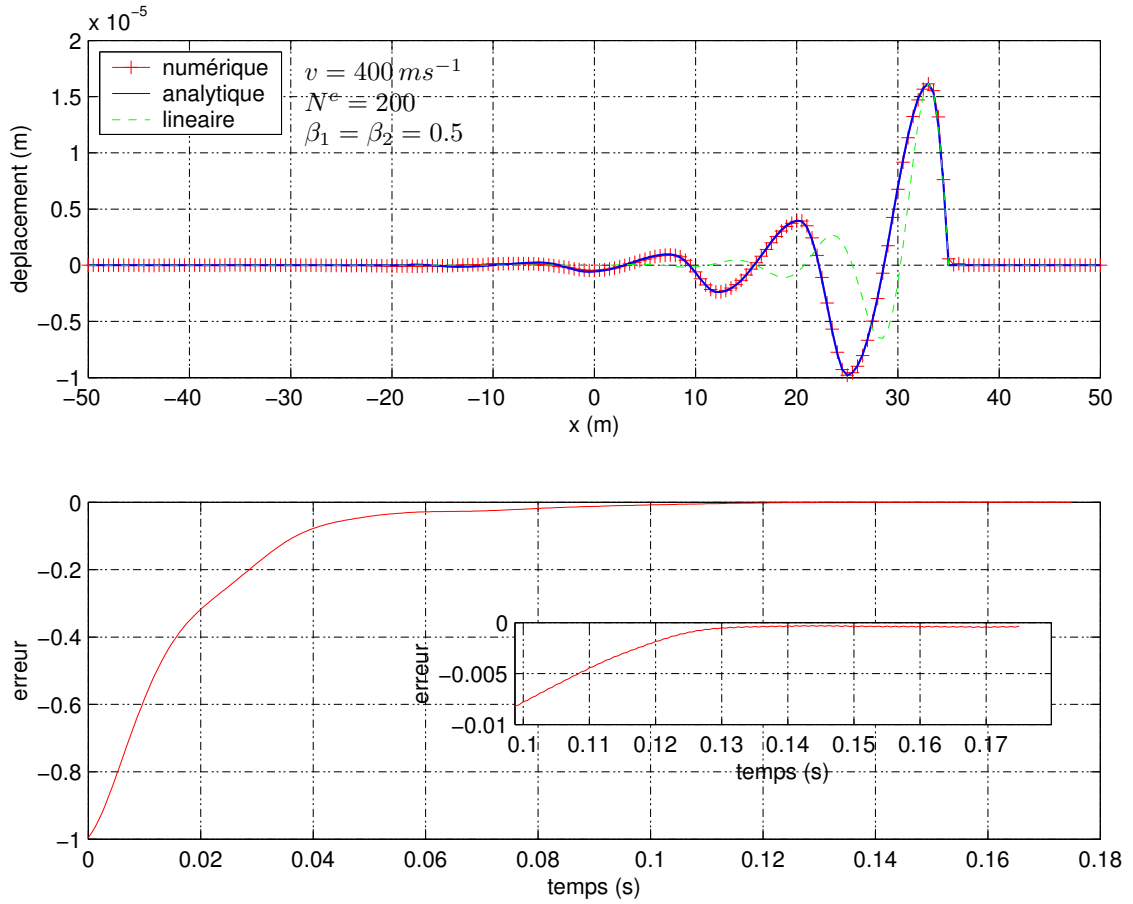
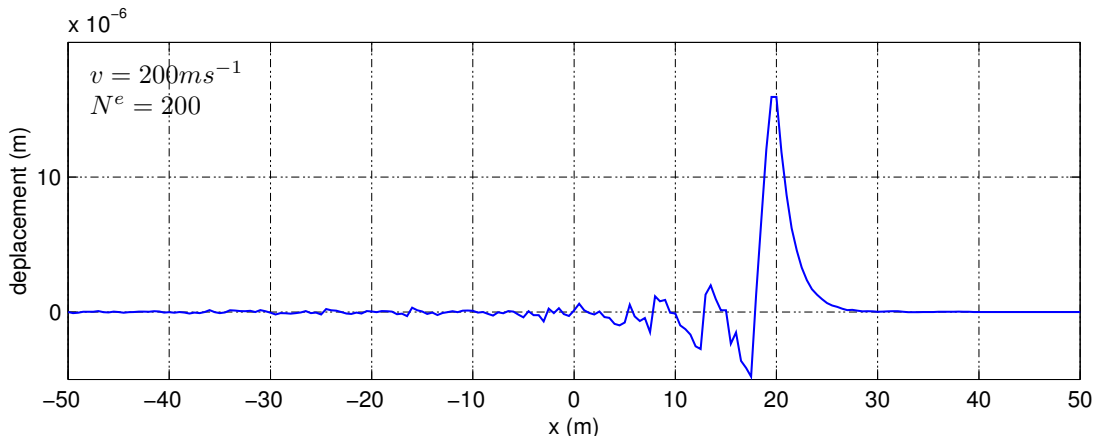


FIGURE 3.6. Solution transitoire du problème nonlinéaire en subsonique

deviendra très cher (même impossible!) si on doit utiliser cette procédure pour les structures en 3 dimensions.

La figure 3.8 représente le résultat dans le cas où la vitesse de la charge a une valeur entre les deux vitesses c_c et c_t . Les exemples numériques montrent que la solution ne tend pas vers zéro de façon régulière mais avec des chocs aux positions où la déformation change le signe. En plus, il est très difficile d'obtenir une stabilisation de la solution.

FIGURE 3.7. *Solution transitoire du problème nonlinéaire en supersonique*FIGURE 3.8. *Solution transitoire du problème nonlinéaire en transonique*

3.4 Solution numérique du problème stationnaire

Considérons d'abord le problème linéaire (dont la loi de comportement s'écrit : $\sigma = E\epsilon$) d'une barre de longueur $2L$, l'équation dynamique (3.2) s'écrit :

$$\rho S \ddot{u}(x, t) + \eta \dot{u}(x, t) - ES u''(x, t) + ku(x, t) = f_0 \delta(x - vt) \quad (3.82)$$

$$u(-\infty, t) = u(\infty, t) = 0 \quad (\text{conditions aux limites}) \quad (3.83)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad ; \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (\text{conditions initiales}) \quad (3.84)$$

On cherche à trouver la solution stationnaire de cette équation par une méthode d'éléments finis statique. Pour faire cela, on utilise d'abord la méthode directe de l'intégration temporelle qui va nous donner une équation de différence finie en temps t . La méthode α -généralisée est utilisée. Ensuite, en passant au repère mobile où les solutions stationnaires deviennent statiques, la condition initiale est remplacée par une relation entre la solution au point considéré et celle à un autre point qui se trouve à une certaine distance. On va obtenir une équation statique qui représente l'équilibre pour chaque couple de deux points en espace x . Le développement en détail est présenté dans les parties suivantes.

3.4.1 Equation discrétisée en temps.

On considère un intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, $t_{n+1} - t_n = \Delta t$. Supposons que les solutions $u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n$ à l'instant t_n sont connues, la méthode implicite α -généralisée ⁽¹⁾ permet d'évaluer les solutions à l'instant t_{n+1} en écrivant l'équation dynamique (3.82) à un instant $t_{n+\alpha\Delta t}$:

$$\rho S \ddot{u}_{n+\alpha\Delta t} + \eta \dot{u}_{n+\alpha\Delta t} - E S u''_{n+\alpha\Delta t} + k u_{n+\alpha\Delta t} = f_{n+\alpha\Delta t} \quad (3.85)$$

Les inconnues à l'instant $n + \alpha\Delta t$ sont déterminées par des interpolations linéaires entre deux pas de temps t_n, t_{n+1} :

$$u_{n+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha_f) u_{n+1} + \alpha_f u_n \quad (3.86)$$

$$\dot{u}_{n+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha_f) \dot{u}_{n+1} + \alpha_f \dot{u}_n \quad (3.87)$$

$$\ddot{u}_{n+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha_m) \ddot{u}_{n+1} + \alpha_m \ddot{u}_n \quad (3.88)$$

$$f_{n+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha_f) f_{n+1} + \alpha_f f_n \quad (3.89)$$

où deux coefficients d'interpolation différents α_m, α_f sont utilisés pour la force d'inertie et les autres. On utilise ensuite l'approximation de Newmark à l'instant t_{n+1} :

$$u_{n+1} = u(x, t_{n+1}) \approx u_n + \Delta t \dot{u}_n + (1 - \beta_2) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n + \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n+1} \quad (3.90)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}(x, t_{n+1}) \approx \dot{u}_n + (1 - \beta_1) \Delta t \ddot{u}_n + \beta_1 \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (3.91)$$

En remplaçant ces discrétisations (3.86)-(3.91) dans (3.85), on obtient une équation qui permet de déterminer les solutions pour chaque pas de temps t_{n+1} à partir de celles du pas précédent t_n :

$$\left[(1 - \alpha_m) \rho S + (1 - \alpha_f) \beta_1 \Delta t \eta + (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \right] u_{n+1} - \left[(1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \right] E S u''_{n+1} \\ - \left[(1 - \alpha_m) \rho S + (1 - \alpha_f) \beta_1 \Delta t \eta - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \right] u_n \\ - \left[(1 - \alpha_m) \rho S - [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f) \beta_1] \frac{\Delta t}{2} \eta \right] \Delta t \dot{u}_n \\ - [(1 - \beta_2 - \alpha_m) \rho S - (1 - \alpha_f) (\beta_2 - \beta_1) \Delta t \eta] \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} E S u''_n \\ = \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} f_0 [(1 - \alpha_f) \delta(x - vt_{n+1}) + \alpha_f \delta(x - vt_n)] \quad (3.92)$$

Démonstration.

On va éliminer les variables en $t_{n+\alpha\Delta t}$ dans (3.85) en utilisant (3.86)-(3.89) et puis \ddot{u}_{n+1} et \dot{u}_{n+1} pour

¹la méthode α -généralisée (generalized- α) est proposée par Chung et Hulbert [22] à partir de la méthode α de Hilber-Hughes-Taylor (HHT- α) [50]

obtenir une équation dont les variables ne sont que u_{n+1} et $u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n$. A partir de (3.90)(3.91), on peut exprimer $\dot{u}_{n+1}, \ddot{u}_{n+1}$ en fonction de u_{n+1} et des variables à l'instant t_n :

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} u_{n+1} - \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} u_n - \frac{2}{\beta_2 \Delta t} \dot{u}_n - \frac{1 - \beta_2}{\beta_2} \ddot{u}_n \quad (3.93)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} u_{n+1} - \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} u_n + \frac{\beta_2 - 2\beta_1}{\beta_2} \dot{u}_n + \frac{(\beta_2 - \beta_1)\Delta t}{\beta_2} \ddot{u}_n \quad (3.94)$$

On remplace $\dot{u}_{n+1}, \ddot{u}_{n+1}$ dans l'équation dont les variables en $t_{n+\alpha\Delta t}$ sont déjà éliminées :

$$\begin{aligned} & \rho S[(1 - \alpha_m)\ddot{u}_{n+1} + \alpha_m \ddot{u}_n] + \eta[(1 - \alpha_f)\dot{u}_{n+1} + \alpha_f \dot{u}_n] - ES[(1 - \alpha_f)u''_{n+1} + \alpha_f u''_n] \\ & + k[(1 - \alpha_f)u_{n+1} + \alpha_f u_n] = f_0[(1 - \alpha_f)\delta(x - vt_{n+1}) + \alpha_f \delta(x - vt_n)] \end{aligned} \quad (3.95)$$

et on obtient l'équation suivante après quelques simplifications :

$$\begin{aligned} & \left[(1 - \alpha_m) \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} \rho S + (1 - \alpha_f) \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} \eta + (1 - \alpha_f) k \right] u_{n+1} - (1 - \alpha_f) ES u''_{n+1} \\ & - \left[(1 - \alpha_m) \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2} \rho S + (1 - \alpha_f) \frac{2\beta_1}{\beta_2 \Delta t} \eta - \alpha_f k \right] u_n \\ & - \left[(1 - \alpha_m) \frac{2}{\beta_2 \Delta t} \rho S - \left(1 - (1 - \alpha_f) \frac{2\beta_1}{\beta_2} \right) \eta \right] \dot{u}_n \\ & - \left[- \left(1 - \frac{1 - \alpha_m}{\beta_2} \right) \rho S - (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} \eta \Delta t \right] \ddot{u}_n - ES \alpha_f u''_n \\ & = f_0[(1 - \alpha_f)\delta(x - vt_{n+1}) + \alpha_f \delta(x - vt_n)] \end{aligned} \quad (3.96)$$

En multipliant cette équation par $\frac{\beta_2 \Delta t^2}{2}$, on obtient (3.92). \square

3.4.2 Equation stationnaire dans le repère mobile.

Dans le régime permanent, on a toujours une relation supplémentaire entre les solutions aux deux pas de temps (t_n, t_{n+1}) :

$$\boxed{u_n(x) = u_{n+1}(x + v\Delta t)} \quad (3.97)$$

Passons au repère mobile défini par $x^* = x - vt_{n+1}$, les vitesses et accélérations dans (3.92) peuvent s'exprimer par :

$$\dot{u}_n = -v \frac{\partial u_n}{\partial x^*} = -v \frac{\partial u_{n+1}(x^* + v\Delta t)}{\partial x^*} \quad (3.98)$$

$$\ddot{u}_n = v^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^{*2}} = v^2 \frac{\partial^2 u_{n+1}(x^* + v\Delta t)}{\partial x^{*2}} \quad (3.99)$$

L'équation (3.92) devient stationnaire :

$$\begin{aligned} & \left[(1 - \alpha_m) \rho S + (1 - \alpha_f) \beta_1 \Delta t \eta + (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \right] u(x) - \left[(1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \right] ES u''(x) \\ & - \left[(1 - \alpha_m) \rho S + (1 - \alpha_f) \beta_1 \Delta t \eta - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \right] u(x + v\Delta t) \\ & + \left[(1 - \alpha_m) \rho S - [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f) \beta_1] \frac{\Delta t}{2} \eta \right] v \Delta t u'(x + v\Delta t) \\ & - [(1 - \beta_2 - \alpha_m) \rho S - (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1) \Delta t \eta] \frac{v^2 \Delta t^2}{2} u''(x + v\Delta t) \\ & - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} ES u''(x + v\Delta t) \\ & = \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} f_0[(1 - \alpha_f)\delta(x) + \alpha_f \delta(x + v\Delta t)] \end{aligned} \quad (3.100)$$

On voit que si $v = 0$, cette équation se réduit à l'équation statique : $ku(x) - ESu''(x) = f_0\delta(x)$. Afin de réduire l'écriture dans le calcul, on réécrit (3.100) sous la forme plus simple suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 u(x) - A_2 u''(x) - B_1 u(x + v\Delta t) + B_2 u'(x + v\Delta t) \\ - B_3 u''(x + v\Delta t) = F_1 \delta(x) + F_2 \delta(x + v\Delta t) \end{aligned}} \quad (3.101)$$

où :

$$A_1 = (1 - \alpha_m)\rho S + (1 - \alpha_f)\beta_1 \Delta t \eta + (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \quad (3.102)$$

$$A_2 = (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} ES \quad (3.103)$$

$$B_1 = (1 - \alpha_m)\rho S + (1 - \alpha_f)\beta_1 \Delta t \eta - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} k \quad (3.104)$$

$$B_2 = \left[(1 - \alpha_m)\rho S - [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f)\beta_1] \frac{\Delta t}{2} \eta \right] v \Delta t \quad (3.105)$$

$$B_3 = [(1 - \beta_2 - \alpha_m)\rho S - (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1)\Delta t \eta] \frac{v^2 \Delta t^2}{2} + \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} ES \quad (3.106)$$

$$F_1 = (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} f_0 \quad (3.107)$$

$$F_2 = \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} f_0 \quad (3.108)$$

3.4.3 Formulation variationnelle et discrétisation

A. Formulation variationnelle

Soit $\Omega = [-L, L]$. La formulation forte du problème (3.100) est :

$$\left| \begin{aligned} &\text{Chercher } u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ &A_1 u(x) - A_2 u''(x) - B_1 u(x + v\Delta t) + B_2 u'(x + v\Delta t) \\ &\quad - B_3 u''(x + v\Delta t) = F_1 \delta(x) + F_2 \delta(x + v\Delta t) \\ &u(x < -L) = u(x > L) = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.109)$$

Comme il y a une quantité $v\Delta t$ qui intervient dans cette équation, on va définir un autre espace $\tilde{\Omega}$ qui est défini par : $\tilde{\Omega} = [-L, L + v\Delta t]$. On introduit deux espaces : \mathcal{U} l'espace des fonctions solutions et \mathcal{W} l'espace des fonctions tests qui sont définis par :

$$\mathcal{U} = \{u \mid u \in H^1(\tilde{\Omega}), u(-L) = u(L + v\Delta t) = 0\} \quad (3.110)$$

$$\mathcal{W} = \{w \mid w \in H^1(\Omega), w(-L) = w(L) = 0\} \quad (3.111)$$

La formulation variationnelle de (3.109) s'écrit comme suit :

$$\left| \begin{aligned} &\text{Chercher } u(x) \in \mathcal{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall w \in \mathcal{W} : \\ &(A_1 u(x), w(x))_{\Omega} + (A_2 u'(x), w'(x))_{\Omega} - (B_1 u(x + v\Delta t), w(x))_{\Omega} + (B_2 u'(x + v\Delta t), w(x))_{\Omega} \\ &\quad + (B_3 u'(x + v\Delta t), w'(x))_{\Omega} = (F_1 \delta(x) + F_2 \delta(x + v\Delta t), w(x))_{\Omega} \end{aligned} \right. \quad (3.112)$$

où la notation $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ désigne : $(\cdot, \cdot)_{\Omega} = \int_{\Omega} (\cdot, \cdot) dx$. Les conditions aux limites sont incluses dans cette formulation en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} (u''(x), w(x))_{\Omega} &= (u'(x), w(x)) \Big|_{-L}^L - (u'(x), w'(x))_{\Omega} \\ &= - (u'(x), w'(x))_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.113)$$

B. Discrétisation par la méthode de Galerkin.

On construit deux espaces d'approximation de \mathcal{U} et \mathcal{W} : $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$ dont les dimensions sont finies. Le problème (7.9) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^h \in \mathcal{U}^h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall w^h \in \mathcal{W}^h : \\ a(u^h, w^h) = f(w^h) \end{array} \right. \quad (3.114)$$

Le domaine Ω peut ensuite être discrétisé par un ensemble de sous domaines : $\Omega = \bigcup_e \Omega^e$. Dans chaque sous domaine Ω^e , u et w sont déterminés en fonction de leurs valeurs aux noeuds e grace aux fonctions d'interpolation :

$$u(x) \approx u^h(x) = \mathbf{N}_I(x) \mathbf{u}_I \quad (I = 1 \div n^e) \quad (3.115)$$

$$w(x) \approx w^h(x) = \tilde{\mathbf{N}}_J(x) \mathbf{w}_J \quad (J = 1 \div n^e) \quad (3.116)$$

où n^e est le nombre de noeuds de l'élément Ω^e . Ici, on utilise la méthode de Galerkin standard qui suppose que $\tilde{\mathbf{N}} \equiv \mathbf{N}$.

On discrétise le domaine $[-L, L]$ avec N^e éléments. Pour chaque élément e défini dans $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\begin{aligned} a(u^h, w^h)_{\Omega^e} &= \mathbf{w}_J \left[\underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_1 \mathbf{N}_J(x) \mathbf{N}_I(x) dx}_{\mathbf{M}_a^e} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} A_2 \mathbf{N}'_J(x) \mathbf{N}'_I(x) dx}_{\mathbf{K}_a^e} \right. \\ &\quad - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} B_1 \mathbf{N}_J(x) \mathbf{N}_I(x + v\Delta t) dx}_{\mathbf{M}_b^e} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} B_2 \mathbf{N}_J(x) \mathbf{N}'_I(x + v\Delta t) dx}_{\mathbf{C}_b^e} \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} B_3 \mathbf{N}'_J(x) \mathbf{N}'_I(x + v\Delta t) dx}_{\mathbf{K}_b^e} \right] \mathbf{u}_I \\ &= \mathbf{w}_J \mathbf{K}_{JI}^e \mathbf{u}_I \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} f(w^h)_{\Omega^e} &= \mathbf{w}_J \left[\underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{N}_J(x) (F_1 \delta(x) + F_2 \delta(x + v\Delta t)) dx}_{\mathbf{F}^e} \right] \\ &= \mathbf{w}_J \mathbf{F}_J^e \end{aligned} \quad (3.118)$$

On a introduit \mathbf{K}^e et \mathbf{F}^e qui sont la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur de force élémentaire. La matrice \mathbf{K}^e est calculée par :

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{M}_a^e + \mathbf{K}_a^e - \mathbf{M}_b^e + \mathbf{C}_b^e + \mathbf{K}_b^e \quad (3.119)$$

où \mathbf{M}_a^e , \mathbf{K}_a^e , \mathbf{M}_b^e , \mathbf{C}_b^e , \mathbf{K}_b^e sont définis dans (3.117).

Après l'assemblage des matrices élémentaires, on va obtenir un système d'équations statique :

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.120)$$

où \mathbf{K} , \mathbf{u} , \mathbf{F} sont respectivement la matrice de rigidité globale, le vecteur de déplacement global et le vecteur de force extérieure global.

3.4.4 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis

La procédure d'éléments finis peut être réalisée normalement avec les matrices élémentaires définies dans (3.117). Les matrices \mathbf{M}_a^e , \mathbf{K}_a^e sont calculées sans difficulté comme dans le cas classique. En revanche, les intégrations de \mathbf{M}_b^e , \mathbf{C}_b^e , \mathbf{K}_b^e sont anormales comme la fonction $u(x + v\Delta t)$ a un décalage en variable par rapport à $w(x)$. Ces intégrations ont les mêmes formes et peuvent être calculées de la même façon. On évalue par exemple une intégration sur un élément e qui se trouve dans $[x_i, x_{i+1}]$ comme suit :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)u(x + v\Delta t)dx \quad (3.121)$$

On rappelle l'hypothèse qui impose que $v\Delta t$ soit toujours inférieure à la taille d'un élément ($v\Delta t < x_{i+2} - x_{i+1}$) et on peut en déduire :

$$u(x + v\Delta t) = \mathbf{N}_I^e(x + v\Delta t) \mathbf{u}_I^e \quad \text{si } x \leq x_{i+1} - v\Delta t \quad (3.122)$$

$$u(x + v\Delta t) = \mathbf{N}_I^{e+1}(x + v\Delta t) \mathbf{u}_I^{e+1} \quad \text{si } x > x_{i+1} - v\Delta t \quad (3.123)$$

où \mathbf{N}^e , \mathbf{u}^e sont la fonction d'interpolation et le vecteur de déplacements aux noeuds de l'élément e considéré. L'intégration ci-dessus s'exprime par :

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}-v\Delta t} w_i(x)u_i(x + v\Delta t)dx}_1 + \underbrace{\int_{x_{i+1}-v\Delta t}^{x_{i+1}} w_i(x)u_{i+1}(x + v\Delta t)dx}_2 \\ &= \mathbf{w}_J^n \left[\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}-v\Delta t} \mathbf{N}_J^n(x) \mathbf{N}_I^n(x + v\Delta t) dx \right) \mathbf{u}_I^n + \left(\int_{x_{i+1}-v\Delta t}^{x_{i+1}} \mathbf{N}_J^n(x) \mathbf{N}_I^{n+1}(x + v\Delta t) dx \right) \mathbf{u}_I^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.124)$$

La figure (3.9) illustre la façon de calculer cette intégration.

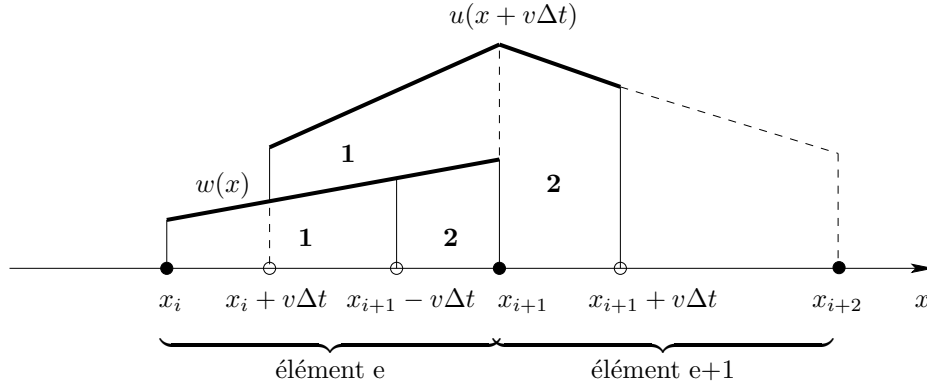


FIGURE 3.9. Intégration avec décalage

Si on discrétise la barre par des éléments dont les tailles sont régulières h et si dans chaque élément ($[x_i, x_{i+1}]$), on utilise une fonction d'interpolation linéaire :

$$\mathbf{N}(x) = \left\langle \frac{x_{i+1} - x}{h}, \frac{x - x_i}{h} \right\rangle \quad (3.125)$$

on peut déterminer explicitement les matrices élémentaires \mathbf{M}_a^e , \mathbf{K}_a^e , \mathbf{M}_b^e , \mathbf{C}_b^e , \mathbf{K}_b^e , \mathbf{F}^e d'un élément e comme suit :

$$\mathbf{M}_a^e = \frac{A_1 h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}_a^e = \frac{A_2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{M}_b^e = \frac{B_1 h}{6} \begin{bmatrix} (1-\theta)^2(2+\theta) & (1+3\theta-2\theta^3) & \theta^3 \\ (1-\theta)^3 & (2-\theta)(1+2\theta-2\theta^2) & \theta^2(3-\theta) \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{C}_b^e = \frac{B_2}{2} \begin{bmatrix} -(1-\theta^2) & (1-2\theta^2) & \theta^2 \\ -(1-\theta)^2 & 1+2\theta(\theta-2) & -\theta(\theta-2) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{B_3}{h} \begin{bmatrix} 1-\theta & 2\theta-1 & -\theta \\ \theta-1 & 1-2\theta & \theta \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{F}^{e=e_f} = \begin{Bmatrix} \theta F_2 \\ F_1 + (1-\theta) F_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}^{e \neq e_f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.130)$$

où $\theta = \frac{v\Delta t}{h} \leq 1$ et e_f est l'indice de l'élément qui se trouve juste devant la position de la force.

3.4.5 Etudes paramétriques

Une équation par éléments finis est toujours équivalente avec un certain schéma de différence finie. Dans ce paragraphe, on va essayer d'écrire l'équation en différence finie équivalente à (3.120) pour minimiser les erreurs numériques causées par les approximations en réglant les paramètres $\alpha_m, \alpha_f, \beta_1, \beta_2$. Comme les matrices élémentaires s'écrivent sur 3 noeuds, le schéma en différence finie équivalent peut être écrit sous la forme :

$$au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} + du_{i+2} = 0 \quad (3.131)$$

On dit que ce schéma est convergent si le développement en série de la fonction :

$$f(h) = a(h)u(x-h) + b(h)u(x) + c(h)u(x+h) + d(h)u(x+2h) \quad (3.132)$$

tend vers zéro en utilisant l'équation stationnaire quand $h \rightarrow 0$. On va simplifier les expressions de a, b, c, d en prenant un pas de temps Δt qui vaut : $\Delta t = \frac{h}{v}$ (en conséquence $\theta = 1$) et qui donne la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{A_1 h}{3} + \frac{A_2}{h} & \frac{A_1 h}{6} - \frac{A_2}{h} - \frac{B_1 h}{3} - \frac{B_2}{2} + \frac{B_3}{h} & -\frac{B_1 h}{6} + \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{h} \\ \frac{A_1 h}{6} - \frac{A_2}{h} & \frac{A_1 h}{3} + \frac{A_2}{h} - \frac{B_1 h}{6} - \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{h} & -\frac{B_1 h}{3} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_3}{h} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

On peut en déduire les coefficients a, b, c, d :

$$a = \mathbf{K}_{21}^e = \frac{A_1 h}{6} - \frac{A_2}{h} \quad (3.134)$$

$$b = \mathbf{K}_{11}^e + \mathbf{K}_{22}^e = \frac{2A_1 h}{3} + \frac{2A_2}{h} - \frac{B_1 h}{6} - \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{h} \quad (3.135)$$

$$c = \mathbf{K}_{12}^e + \mathbf{K}_{23}^e = \frac{A_1 h}{6} - \frac{A_2}{h} - \frac{2B_1 h}{3} + \frac{2B_3}{h} \quad (3.136)$$

$$d = \mathbf{K}_{23}^e = -\frac{B_1 h}{6} + \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{h} \quad (3.137)$$

Le polynôme (3.132) est développé jusqu'au 6^e ordre en série de Taylor avec différents paramètres $\alpha_m, \alpha_f, \beta_1, \beta_2$. Par exemple, avec les paramètres $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5, \alpha_m = 0.25, \alpha_f = 0.5$, le développement de $f(h)$ nous donne :

$$f(h) \approx \frac{h^3}{4v^2} g(x) + \frac{h^4}{8v^2} D^{(1)} g(x) + \frac{h^5}{12v^2} D^{(2)} g(x) + \frac{h^5}{48v^2} k u''(x) + \mathcal{O}(h^6) \quad (3.138)$$

$$= \frac{h^3}{4v^2} \left[g(x) + \frac{h}{2} D^{(1)} g(x) + \frac{h^2}{3} D^{(2)} g(x) + \frac{h^2}{12} k u''(x) + \mathcal{O}(h^3) \right] \quad (3.139)$$

où $g(x) = -(E - \rho v^2)Su''(x) + \eta vu'(x) + ku(x)$ est la fonction de l'équation stationnaire. Comme l'équation stationnaire est définie par $g(x) = 0$, l'erreur de cette approximation ($f(h) = 0$) s'exprime par :

$$e(h) \approx \frac{kh^2}{12}u''(x) + \mathcal{O}(h^3) \quad (3.140)$$

C'est la meilleure approximation qu'on a trouvée dont l'erreur est du 2^e ordre par rapport à la taille des éléments h ².

Si on ajoute dans $f(h)$ une correction numérique qui est déterminée par :

$$-\frac{kh^3}{48v^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (3.141)$$

dont le développement en fonction de h vaut $-\frac{kh^5}{48v^2}$, on peut supprimer l'erreur dans (3.138).

Revenons à la méthode des éléments finis, on peut ajouter dans la matrice de rigidité élémentaire une matrice de correction suivante pour améliorer la précision :

$$\mathbf{K}_{corr} = \frac{kh^3}{48v^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

3.4.6 Problème nonlinéaire

La procédure présentée ci-dessus peut être étendue facilement aux cas nonlinéaires, surtout pour le comportement du type unilatéral qu'on considère ici (3.3)(3.4). Dans ce cas, les matrices tangentes élémentaires peuvent être déterminées explicitement par les mêmes formules que (3.117). Par exemple pour un élément e , on a :

$$\mathbf{K}_t^e = \mathbf{M}_a^e + \mathbf{K}_a^e - \mathbf{M}_b^e + \mathbf{C}_b^e + \mathbf{K}_b^e \quad (3.143)$$

où les trois matrices \mathbf{M}_a^e , \mathbf{M}_b^e , \mathbf{C}_b^e sont toujours constantes. Deux matrices \mathbf{K}_a^e , \mathbf{K}_b^e sont calculées en fonction de l'état de la déformation dans l'élément considéré.

Si on utilise des éléments linéaires à deux noeuds, la déformation dans un élément (e) est constante : $\epsilon^e = \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i)$ et en conséquence les coefficients A_2 , B_3 sont aussi constants dans chaque élément. Les matrices \mathbf{K}_a^e et \mathbf{K}_b^e sont déterminées par :

$$\mathbf{K}_a^e = \frac{A_2^{(e)}}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$\mathbf{K}_b^e = \frac{B_3^{(e)}}{h} \begin{bmatrix} 1 - \theta & \theta - 1 & 0 \\ \theta - 1 & 1 - \theta & 0 \end{bmatrix} + \frac{B_3^{(e+1)}}{h} \begin{bmatrix} 0 & \theta & -\theta \\ 0 & -\theta & \theta \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

où $A_2^{(e)}$, $B_3^{(e)}$ sont déterminés comme dans (3.103) et (3.106) :

$$A_2^{(e)} = (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} ES \quad (3.146)$$

$$B_3^{(e)} = [(1 - \beta_2 - \alpha_m)\rho S - (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1)\Delta t \eta] \frac{v^2 \Delta t^2}{2} + \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} ES \quad (3.147)$$

²Un exemple pour l'autre choix de paramètres, si $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha_m = 0.$, $\alpha_f = 0.$ (qui correspond à une discrétisation en temps par le schéma Newmark), l'erreur $e(h)$ vaut :

$$e(h) \approx -\frac{h}{3}\rho S u'''(x) - \frac{h^2}{6}ES u''(x) + \frac{h^2}{12}\eta v u'''(x) + \frac{h^2}{4}ku''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

avec $E = E_c$ si $\epsilon^{(e)} < 0$ et $E = E_t$ sinon.

La procédure itérative de Newton-Raphson peut être réalisée normalement. A chaque itération (k), le résidu est calculé par :

$$\mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{F} \quad (3.148)$$

L'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}$ et la valeur mise à jour du vecteur \mathbf{u} sont :

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = - \left[\mathbf{K}_t^{(k)} \right]^{-1} \mathbf{R}^{(k)} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k+1)} \quad (3.150)$$

3.5 Validation numérique

On traite le même problème que celui du calcul transitoire qui est posé dans la section 1.2 pour valider le schéma numérique proposé. Les paramètres physiques et géométriques de la structure sont donnés dans le tableau 3.1. Comme avec la validation de la méthode du calcul transitoire, les deux régimes subsoniques et supersoniques sont considérés pour les deux cas : linéaire et nonlinéaire.

Dans tous les exemples suivants, on utilise les mêmes paramètres numériques : $\alpha_m = 0.25$, $\alpha_f = 0.5$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$, $\theta = 1$ ($\Delta t = \frac{h}{v}$).

3.5.1 Cas linéaire

TABLEAU 3.4. Paramètres de calcul pour le cas linéaire

	Cas subsonique	Cas supersonique
Vitesse v	80 m.s ⁻¹	400 m.s ⁻¹
Longueur de la barre L	[-10m, 10m]	[-25m, 25m]
Nombre d'éléments N^e	40	100

On calcule d'abord le cas linéaire. Les paramètres sont donnés dans le tableau 3.4. Comme la force est fixe dans ces calculs, on peut donc utiliser des longueurs de barre qui sont respectivement les moitiés de celles des calculs transitoires en gardant les mêmes tailles des éléments.

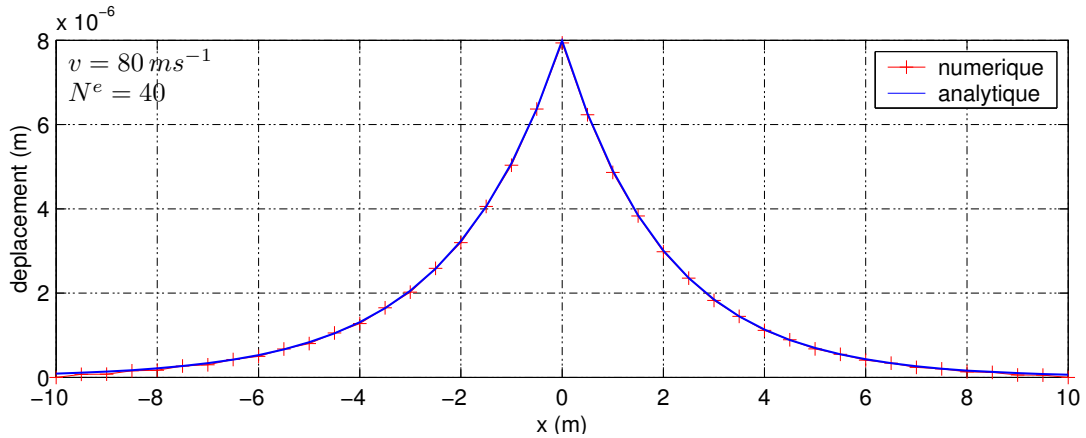
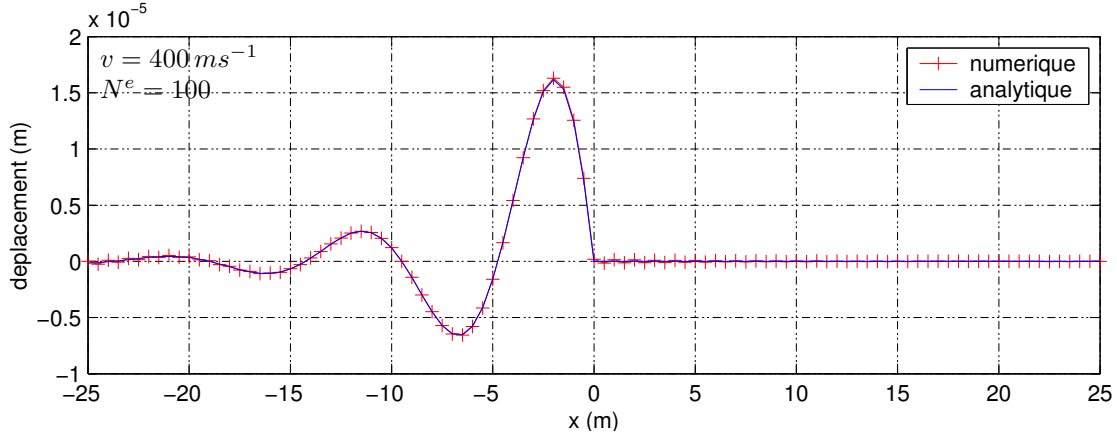
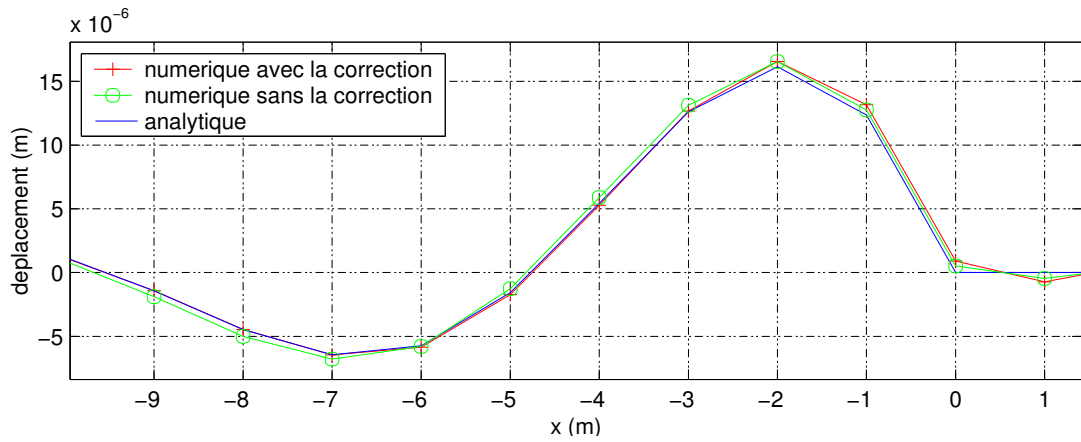


FIGURE 3.10. Solution stationnaire du problème linéaire en subsonique

FIGURE 3.11. *Solution stationnaire du problème linéaire en supersonique*FIGURE 3.12. *Comparaison des calculs avec ou sans la correction*

Les figures (3.10) et (3.11) représentent les comparaisons entre les résultats numériques et les solutions analytiques dans deux cas de vitesse : le cas subsonique ($v = 80 \text{ m.s}^{-1}$) et le cas supersonique ($v = 400 \text{ m.s}^{-1}$).

On constate que les résultats obtenus sont très proches des solutions analytiques. Les erreurs dans les cas subsoniques et supersoniques sont respectivement $e = 1.2\%$ et $e = 1.8\%$.

On profite aussi de cet exemple pour montrer l'effet de la correction numérique. Dans la figure 3.12, on trace la solution analytique en comparant le résultat numérique avec ou sans la correction. On voit bien que la correction peut donner une amélioration importante à la précision du calcul. L'erreur dans le calcul sans correction est $e = 6.7\%$.

3.5.2 Cas nonlinéaire

Les paramètres de calcul sont donnés dans le tableau 3.5 pour les deux cas subsonique et supersonique. Les courbes qui sont tracées dans les figures 3.13 et 3.14 montrent des résultats assez précis par rapport aux solutions analytiques. La convergence dans le cas subsonique est obtenue après 4 itérations. Pour le cas supersonique, le nombre d'itérations nécessaires est 12. On voit bien que cette méthode permet une diminution importante du volume de calcul par rapport à la méthode transitoire.

REMARQUE 3.5.1

Dans le cas transonique $c_t < v < c_c$, on ne peut pas trouver la solution car la procédure itérative ne converge

TABLEAU 3.5. Paramètres de calcul pour le cas nonlinéaire

	Cas subsonique	Cas supersonique
Vitesse v	80 m.s^{-1}	400 m.s^{-1}
Longueur de la barre L	$[-10\text{m}, 10\text{m}]$	$[-50\text{m}, 50\text{m}]$
Nombre d'éléments N^e	40	200

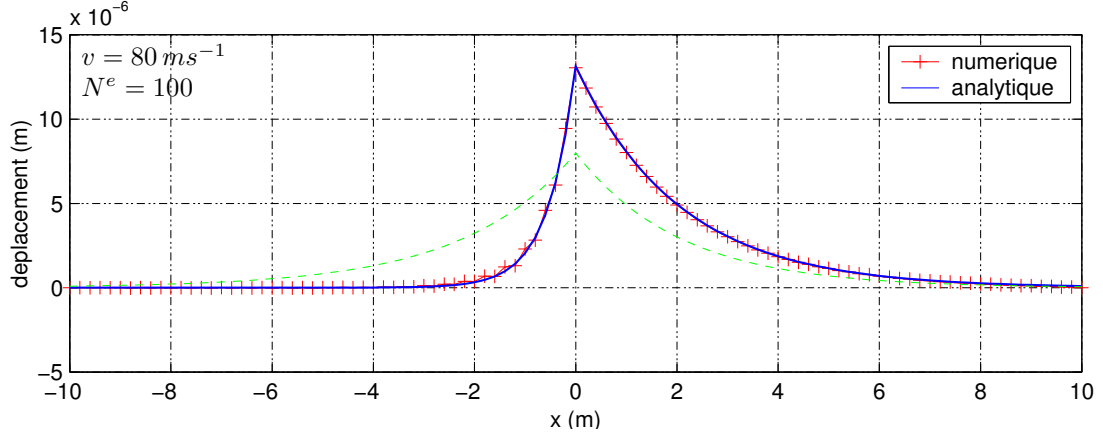


FIGURE 3.13. Solution stationnaire du problème nonlinéaire en subsonique

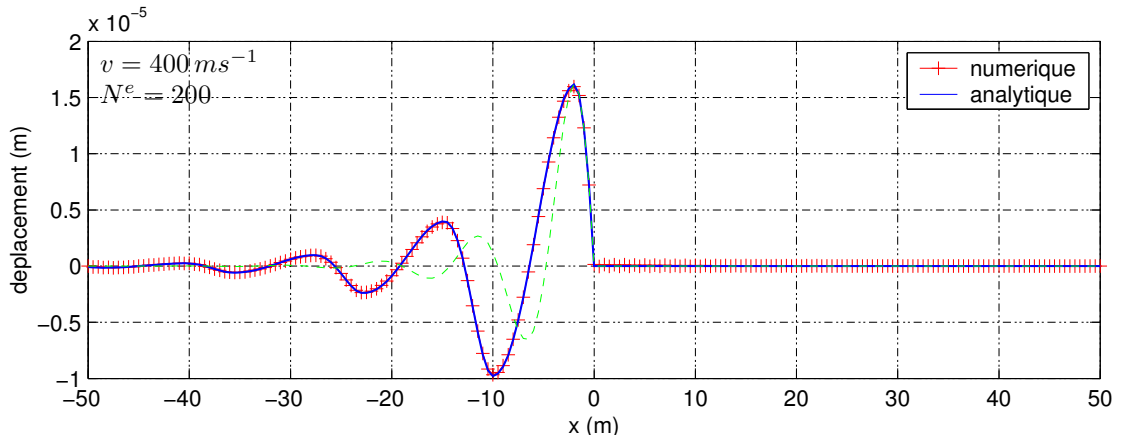


FIGURE 3.14. Solution stationnaire du problème nonlinéaire en supersonique

pas puisque il n'y a pas de solution en petite déformation comme on a montré dans le paragraphe précédent.

3.6 Conclusion

On a étudié dans cette partie les phénomènes physiques de la propagation d'ondes dans une barre non-linéaire de type *unilatéral* soumise à une charge mobile constante. Les solutions analytiques dans les différents cas de vitesse de charge montrent les différents mécanismes de propagation des ondes dans la barre. Elles montrent aussi que, dans le cadre des hypothèses qu'on a utilisées, on ne peut atteindre que le régime permanent si la vitesse de la charge est soit inférieure à la plus petite vitesse d'onde dans la barre (absolument subsonique), soit supérieure à la plus grande vitesse d'onde dans la barre (absolument supersonique). Autrement, l'état des propagations d'ondes dans la barre devient beaucoup plus complexe avec des ondes de choc qui apparaissent.

Dans ce chapitre, on a présenté aussi des méthodes numériques pour résoudre le problème non-linéaire d'une barre soumise à une charge mobile avec une vitesse constante. Les solutions analytiques de ce problème sont utilisées pour évaluer la précision des schémas numériques. Dans un premier temps, on a utilisé un schéma d'intégration numérique classique (Newmark) pour calculer le problème dans le régime transitoire. Néanmoins, cette méthode demande un gros maillage et aussi un grand nombre de pas de temps de calcul si on veut accéder au régime stationnaire. En raison de cela, une autre méthode a été proposée dans un deuxième temps afin d'évaluer directement la solution stationnaire dans un nouveau repère mobile qui s'attache à la position actuelle de la force. Au lieu de résoudre l'équation dans le repère mobile qui devient une équation hyperbolique dans le cas supersonique, on a résolu une équation elliptique équivalente à celle obtenue à partir de l'équation transitoire discrétisée en temps. Les comparaisons montrent que les résultats obtenus par ce schéma s'accordent bien avec les résultats analytiques dans les deux cas subsonique et supersonique.

En conclusion :

- Si la vitesse de la charge est absolument subsonique ou supersonique, on peut traiter le problème dans le repère mobile. La méthode transitoire est évidemment toujours utilisable mais avec un plus grand volume de calcul.
- Sinon, comme le problème posé avec les hypothèses de petites déformations utilisées dans ce chapitre n'a pas de solution, il faudra étudier le problème en grande déformation. On n'étudiera pas ces problèmes dans le cadre de cette thèse.

Chapitre 4

Milieu unidimensionnel en flexion soumis à une charge mobile

4.1 Introduction

Dans la modélisation des voies ferrées, le rail est considéré comme une poutre en flexion couplée avec la structure d'assise en dessous. Pour simplifier la complexité des structures d'assise, on suppose que chaque composante (les blochets, le ballast, les différentes couches du sol ...) est uniforme et continue dans la direction horizontale. Cela conduit à un problème d'une poutre posée sur un milieu multi-couche. Dans un modèle plus simple, ce milieu multicouche peut être modélisé par un système discret dans la direction verticale où on définit à chaque interface un degré de liberté (figure 4.1). Par exemple, chaque couche peut être modélisée par un système simple de masse-ressort-amortisseur. Donc, s'il existe n couches différentes, on a un système discret de n degrés de liberté. La structure globale devient un système discret de n degrés de liberté (poutre + système discret).

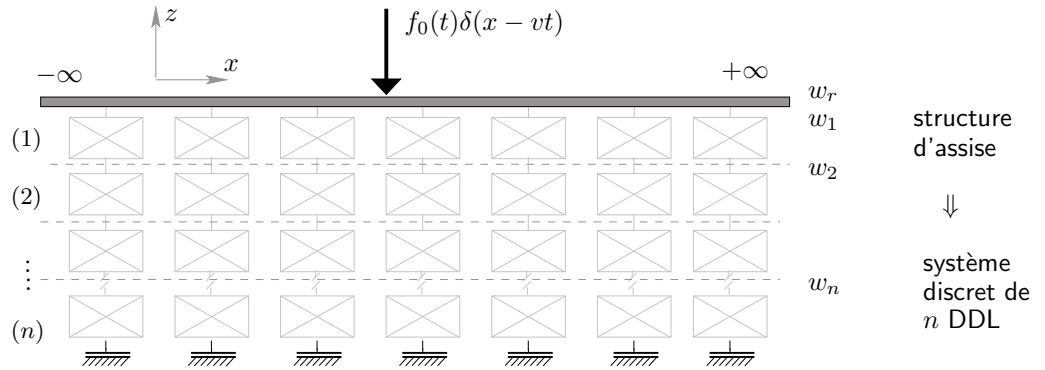


FIGURE 4.1. *Modèle unidimensionnel en flexion*

On cherche les réponses dynamiques de ce système dues à une charge ponctuelle (dont l'amplitude $f_0(t)$ est soit constante soit variable en fonction du temps) qui se déplace avec une vitesse v constante. Les équations dynamiques de ce système peuvent être établies en écrivant les équilibres entre le rail et la structure d'assise. Appelons f_r la force d'interaction entre ces deux parties, l'équation dynamique du rail qui est considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli s'écrit :

$$\rho_r S_r (\ddot{w}_r + g) + E_r I_r w_r^{(4)} = f_r - f_0(t)\delta(x - vt) \quad (4.1)$$

où $\rho_r S_r, E_r I_r$ désignent la masse et la rigidité en flexion sur une unité de longueur de la poutre, w_r est le déplacement vertical. L'accélération de gravité g est ajoutée pour tenir compte du poids de la poutre et des différentes parties de la structure d'assise.

Le système discret de n degrés de liberté peut toujours être décrit par 3 matrices de dimensions $n \times n$ qui représentent la masse \mathbf{m}^a , l'amortissement $\boldsymbol{\eta}^a$ et la rigidité \mathbf{k}^a . En notant \mathbf{w} le vecteur de déplacement de ces n degrés de liberté, l'équation dynamique sous la sollicitation de la force f_r doit vérifier le système d'équations qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{m}_{ij}^a \ddot{\mathbf{w}}_j + \boldsymbol{\eta}_{ij}^a \dot{\mathbf{w}}_j + \mathbf{k}_{ij}^a \mathbf{w}_j = \mathbf{f}_i^a(t) + \mathbf{g}_i^a \quad (i = 1 \div n) \quad (4.2)$$

où $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^t$ est le vecteur des déplacements, $\mathbf{f}^a = \{-f_r, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}\}^t$ et \mathbf{g}^a représente le vecteur force de gravité.

A partir de (4.1) et (4.2), on peut éliminer f_r dans cette équation, et on arrive à un système de n équations en utilisant la condition de continuité $w_r = w_1$:

$$(\mathbf{m}_{ij}^a + \rho_r S_r \delta_{1i} \delta_{1j}) \ddot{\mathbf{w}}_j + \boldsymbol{\eta}_{ij}^a \dot{\mathbf{w}}_j + \mathbf{k}_{ij}^a \mathbf{w}_j + E_r I_r \delta_{1i} \delta_{1j} \mathbf{w}_j^{(4)} = -f_0(t) \delta(x - vt) \delta_{1i} + (\mathbf{g}_i^a - \rho_r S_r g \delta_{1i}) \quad (i = 1 \div n) \quad (4.3)$$

En bref, le problème dynamique du modèle unidimensionnel en flexion est défini par :

$$\begin{aligned} (x, t) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : \\ \mathbf{m} \ddot{\mathbf{w}}(x, t) + \boldsymbol{\eta} \dot{\mathbf{w}}(x, t) + \mathbf{k} \mathbf{w}(x, t) + \mathbf{j} \mathbf{w}^{(4)}(x, t) &= \mathbf{f}_0(t) \delta(x - vt) + \mathbf{g} \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{w}}(x, 0) = \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

(4.4)

où \mathbf{w} est le vecteur de déplacement, \mathbf{m} , $\boldsymbol{\eta}$, \mathbf{k} et \mathbf{j} désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité qui sont définies par : $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ij}^a + \rho_r S_r \delta_{1i} \delta_{1j}$, $\boldsymbol{\eta}_{ij} = \boldsymbol{\eta}_{ij}^a$, $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ij}^a$, $\mathbf{j}_{ij} = E_r I_r \delta_{1i} \delta_{1j}$. Dans le cas plus simple où toute la structure d'assise est modélisée par un seul ressort-amortisseur (k, η) , on retrouve le problème scalaire classique :

$$\rho S \ddot{w}(x, t) + \eta \dot{w}(x, t) + k w(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = -f_0(t) \delta(x - vt) - \rho S g \quad (4.5)$$

Alors, on est conduit à résoudre le système non-linéaire (4.4). La méthode d'intégration directe où la position de la charge change après chaque pas de temps est toujours utilisable mais avec un grand volume de calcul. On va présenter dans la partie suivante la méthode numérique pour résoudre le problème dans le repère mobile. Ensuite, la solution analytique pour le cas plus simple (4.5) sera présentée. A la fin, les résultats analytiques et numériques sont comparés pour valider le schéma numérique proposé.

4.2 Système d'équations dynamiques dans le repère mobile

4.2.1 Méthodologie

On s'intéresse à la solution stationnaire du système (4.4). L'idée est toujours de chercher un système d'équations dans le repère mobile par un changement de variable. Cependant, comme l'amplitude de la charge varie en fonction du temps, la solution dans le repère mobile cette fois n'est plus statique. On va voir dans la suite que cette difficulté peut être résolue en notant qu'une certaine fonction $h(x, t)$ peut toujours être décomposée par une séparation des variables :

$$h(x, t) = h_v(x - vt) h_t(t) \quad (4.6)$$

i.e. la fonction $h(x, t)$ peut être décomposée comme un produit de deux fonctions h_v et h_t qui ne dépendent que de la position de la charge et du temps, respectivement.

En utilisant cette décomposition, l'équation stationnaire discrétisée en temps sera écrite pour le premier terme $h_v(x - vt)$ et on va obtenir un système d'équations dont le vecteur force est fixe en espace dans le repère mobile et qui, cette fois, est dynamique.

Comme la fonction $\mathbf{w}(x, t)$ dans (4.4) est un vecteur de dimension n , l'application de (4.6) pour $\mathbf{w}(x, t)$ s'écrit : $\mathbf{w}_i(x, t) = \mathbf{w}_{vi}(x, t)\mathbf{w}_{ti}(x, t)$, $i = 1 \div n$. Afin de simplifier les écritures des équations dans le calcul qui suit (et qui doit normalement s'écrire avec les indices), on propose d'utiliser un opérateur simple qui est défini comme suit :

Définition. Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_3$ et $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{3,3}$. On définit un opérateur “ \diamond ” tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \diamond \mathbf{b} &\Leftrightarrow c_i = a_i b_i \\ \mathbf{B} = \mathbf{A} \diamond \mathbf{a} &\Leftrightarrow B_{ji} = A_{ji} a_i \end{aligned} \quad (\text{pas de somme en } i) \quad (4.7)$$

On peut en déduire les propriétés suivantes de cet opérateur :

$$\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} = \mathbf{b} \diamond \mathbf{a} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \diamond \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{A} \diamond \mathbf{b})\mathbf{a} \quad (4.9)$$

4.2.2 Equation dans le repère mobile

Décomposition de variable. En utilisant l'opérateur “ \diamond ”, le vecteur $\mathbf{w}(x, t)$ peut être décomposé en deux vecteurs \mathbf{w}_v et \mathbf{w}_t ($\mathbf{w}_v, \mathbf{w}_t \in \mathbb{R}_3$) comme dans (4.6) :

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_v(x - vt) \diamond \mathbf{w}_t(t) \quad (4.10)$$

Ses dérivées du premier et du deuxième ordre sont données par :

$$\dot{\mathbf{w}}(x, t) = \dot{\mathbf{w}}_v \diamond \mathbf{w}_t + \mathbf{w}_v \diamond \dot{\mathbf{w}}_t \quad (4.11)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}(x, t) = \ddot{\mathbf{w}}_v \diamond \mathbf{w}_t + 2\dot{\mathbf{w}}_v \diamond \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{w}_v \diamond \ddot{\mathbf{w}}_t \quad (4.12)$$

En remplaçant les 3 équations ci-dessus dans (4.4), on obtient un système d'équations différentielles en temps pour la variable \mathbf{w}_v :

$$\tilde{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{w}}_v + \tilde{\boldsymbol{\eta}}\dot{\mathbf{w}}_v + \tilde{\mathbf{k}}\mathbf{w}_v + \tilde{\mathbf{j}}\mathbf{w}_v^{(4)} = \mathbf{f}_0(t)\delta(x - vt) + \mathbf{g} \quad (4.13)$$

où les matrices de coefficients $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{j}}$ sont définies par :

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.14)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = 2\mathbf{m} \diamond \dot{\mathbf{w}}_t + \boldsymbol{\eta} \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{m} \diamond \ddot{\mathbf{w}}_t + \boldsymbol{\eta} \diamond \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{k} \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j} \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.17)$$

Démonstration.

On applique (4.10) dans (4.4) :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \boldsymbol{\eta}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} + \mathbf{j}\mathbf{w}^{(4)} &= \mathbf{m}(\ddot{\mathbf{w}}_v \diamond \mathbf{w}_t + 2\dot{\mathbf{w}}_v \diamond \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{w}_v \diamond \ddot{\mathbf{w}}_t) \\ &\quad + \boldsymbol{\eta}(\dot{\mathbf{w}}_v \diamond \mathbf{w}_t + \mathbf{w}_v \diamond \dot{\mathbf{w}}_t) + \mathbf{k}\mathbf{w}_v \diamond \mathbf{w}_t(t) + \mathbf{j}\mathbf{w}_v^{(4)} \diamond \mathbf{w}_t(t) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $\mathbf{A}(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \diamond \mathbf{b})\mathbf{a}$, on déduit (4.13).

□

Equation discrétisée en temps pour $w_v(x - vt)$. De même façon que dans le cas uniaxial, on discrétise le vecteur $w_v(x - vt)$ dans l'équation (4.13) par la méthode α -généralisée [22] et on obtient un système d'équations qui relie la solution à l'instant t_{n+1} en fonction de celle à l'instant t_n :

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} + (1 - \alpha_f)\beta_1\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}} + (1 - \alpha_f)\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\tilde{\mathbf{k}} \right] \mathbf{w}_{v(n+1)} + \left[(1 - \alpha_f)\frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \right] \tilde{\mathbf{j}}\mathbf{w}_{v(n+1)}^{(4)} \\
& - \left[(1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} + (1 - \alpha_f)\beta_1\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \alpha_f\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\tilde{\mathbf{k}} \right] \mathbf{w}_{v(n)} \\
& - \left[(1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} - [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f)\beta_1]\frac{\Delta t}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \right] \Delta t \dot{\mathbf{w}}_{v(n)} \\
& - [(1 - \beta_2 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} - (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1)\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}}] \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{w}}_{v(n)} + \alpha_f \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \tilde{\mathbf{j}}\mathbf{w}_{v(n)}^{(4)} \\
& = \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} (1 - \alpha_f)\mathbf{f}(t)\delta(x - vt_{n+1}) + \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \alpha_f\mathbf{f}(t)\delta(x - vt_n) + \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \mathbf{g}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

où $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Pour simplifier les écritures, on réécrit cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{w}_{v(n+1)} + \tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{w}_{v(n+1)}^{(4)} - \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w}_{v(n)} - \tilde{\mathbf{B}}_2 \dot{\mathbf{w}}_{v(n)} - \tilde{\mathbf{B}}_3 \ddot{\mathbf{w}}_{v(n)} + \tilde{\mathbf{B}}_4 \mathbf{w}_{v(n)}^{(4)} \\
& = \mathbf{F}_1(t)\delta(x - vt_{n+1}) + \mathbf{F}_2(t)\delta(x - vt_n) + \mathbf{G}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

où :

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = (1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} + (1 - \alpha_f)\beta_1\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}} + (1 - \alpha_f)\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\tilde{\mathbf{k}} \tag{4.20}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = (1 - \alpha_f)\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\tilde{\mathbf{j}} \tag{4.21}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = (1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} + (1 - \alpha_f)\beta_1\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \alpha_f\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\tilde{\mathbf{k}} \tag{4.22}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_2 = \left[(1 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} - [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f)\beta_1]\frac{\Delta t}{2}\tilde{\boldsymbol{\eta}} \right] \Delta t \tag{4.23}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_3 = [(1 - \beta_2 - \alpha_m)\tilde{\mathbf{m}} - (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1)\Delta t\tilde{\boldsymbol{\eta}}] \frac{\Delta t^2}{2} \tag{4.24}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_4 = \alpha_f \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \tilde{\mathbf{j}} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{F}_1(t) = (1 - \alpha_f)\frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \mathbf{f}(t) \tag{4.26}$$

$$\mathbf{F}_2(t) = \alpha_f \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \mathbf{f}(t) \tag{4.27}$$

$$\mathbf{G} = \frac{\beta_2\Delta t^2}{2} \mathbf{g} \tag{4.28}$$

Changement de variable. A l'instant t_{n+1} , on réalise un changement de variable $x^* = x - vt_{n+1}$. En notant la partie w_v dans ce nouveau repère par w_v^* qui ne dépend que x^* , on a les solutions stationnaires de w_v^* aux deux instants $[t_n, t_{n+1}]$:

$$w_v(x, t_{n+1}) = w_v^*(x^*) \tag{4.29}$$

$$w_v(x, t_n) = w_v^*(x^* + v\Delta t) := w_v^*(x_+^*) \tag{4.30}$$

$$\dot{w}_v(x, t_n) = -v w_v^{*'}(x^* + v\Delta t) := -v w_v^{*'}(x_+^*) \tag{4.31}$$

$$\ddot{w}_v(x, t_n) = v^2 w_v^{*''}(x^* + v\Delta t) := v^2 w_v^{*''}(x_+^*) \tag{4.32}$$

et l'équation (4.19) devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{w}_v(x) + \tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{w}_v^{(4)}(x) - \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w}_v(x_+) + v \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{w}_v'(x_+) - v^2 \tilde{\mathbf{B}}_3 \mathbf{w}_v''(x_+) + \tilde{\mathbf{B}}_4 \mathbf{w}_v^{(4)}(x_+) \\ = \mathbf{F}_1(t)\delta(x) + \mathbf{F}_2(t)\delta(x_+) + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.33)$$

où on a supprimé les “*” pour simplifier les notations.

Assemblage de variables. En tenant compte de (4.14,4.15,4.16,4.17), on peut représenter les expressions de $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_3, \tilde{\mathbf{B}}_4$ en fonction de $\mathbf{m}, \boldsymbol{\eta}$ et \mathbf{k} :

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1 \diamond \mathbf{w}_t + \mathbf{A}_3 \diamond \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{A}_4 \diamond \ddot{\mathbf{w}}_t \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2 \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.35)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 \diamond \mathbf{w}_t + \mathbf{B}_5 \diamond \dot{\mathbf{w}}_t - \mathbf{B}_8 \diamond \ddot{\mathbf{w}}_t \quad (4.36)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{B}_2 \diamond \mathbf{w}_t - \mathbf{B}_6 \diamond \dot{\mathbf{w}}_t \quad (4.37)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_3 = \mathbf{B}_3 \diamond \mathbf{w}_t - \mathbf{B}_7 \diamond \dot{\mathbf{w}}_t \quad (4.38)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_4 = \mathbf{B}_4 \diamond \mathbf{w}_t \quad (4.39)$$

où $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ sont calculés par les mêmes formules que celles des $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_3, \tilde{\mathbf{B}}_4$ dans (4.20)-(4.28) mais en fonction de $\mathbf{m}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{k}, \mathbf{j}$ au lieu de $\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{j}}$ et :

$$\mathbf{A}_3 = 2(1 - \alpha_f)\beta_1 \Delta t \mathbf{m} + (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \boldsymbol{\eta} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{A}_4 = (1 - \alpha_f) \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \mathbf{m} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{B}_5 = 2(1 - \alpha_f)\beta_1 \Delta t \mathbf{m} - \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \boldsymbol{\eta} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{B}_6 = [\beta_2 - 2(1 - \alpha_f)\beta_1] \Delta t^2 \mathbf{m} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{B}_7 = (1 - \alpha_f)(\beta_2 - \beta_1) \Delta t^3 \mathbf{m} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{B}_8 = \alpha_f \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2} \mathbf{m} \quad (4.45)$$

En remplaçant les coefficients $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_3, \tilde{\mathbf{B}}_4$ qui sont aussi des fonctions de \mathbf{w}_t dans (4.33) et en utilisant le fait que $(\mathbf{A} \diamond \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{A} \diamond \mathbf{b})\mathbf{a}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \diamond \mathbf{w}_v(x) + \mathbf{A}_2 \diamond \mathbf{w}_v^{(4)}(x) \\ & - \mathbf{B}_1 \diamond \mathbf{w}_v(x_+) + v \mathbf{B}_2 \diamond \mathbf{w}_v'(x_+) - v^2 \mathbf{B}_3 \diamond \mathbf{w}_v''(x_+) + \mathbf{B}_4 \diamond \mathbf{w}_v^{(4)}(x_+)] \mathbf{w}_t(t) \\ & + [\mathbf{A}_3 \diamond \mathbf{w}_v(x) - \mathbf{B}_5 \diamond \mathbf{w}_v(x_+) - v \mathbf{B}_6 \diamond \mathbf{w}_v'(x_+) + v^2 \mathbf{B}_7 \diamond \mathbf{w}_v''(x_+)] \dot{\mathbf{w}}_t(t) \\ & + [\mathbf{A}_4 \diamond \mathbf{w}_v(x) + \mathbf{B}_8 \diamond \mathbf{w}_v(x_+)] \ddot{\mathbf{w}}_t(t) = \mathbf{F}_1(t)\delta(x) + \mathbf{F}_2(t)\delta(x_+) + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.46)$$

En utilisant $(\mathbf{A} \diamond \mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b})$, on arrive à la dernière étape où on trouve la formule écrite dans le repère mobile qui est équivalente à (4.4) :

$$\begin{aligned} & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : \\ & [\mathbf{A}_1 \mathbf{w}(x, t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{w}^{(4)}(x, t) \\ & - \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(x_+, t) + v \mathbf{B}_2 \mathbf{w}'(x_+, t) - v^2 \mathbf{B}_3 \mathbf{w}''(x_+, t) + \mathbf{B}_4 \mathbf{w}^{(4)}(x_+, t)] \\ & + [\mathbf{A}_3 \dot{\mathbf{w}}(x, t) - \mathbf{B}_5 \dot{\mathbf{w}}(x_+, t) - v \mathbf{B}_6 \dot{\mathbf{w}}'(x_+, t) + v^2 \mathbf{B}_7 \dot{\mathbf{w}}''(x_+, t)] \\ & + [\mathbf{A}_4 \ddot{\mathbf{w}}(x, t) + \mathbf{B}_8 \ddot{\mathbf{w}}(x_+, t)] \\ & = \mathbf{F}_1(t) \delta(x) + \mathbf{F}_2(t) \delta(x_+) + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.2.3 Equation dynamique en éléments finis.

A ce stade, on peut écrire la formulation variationnelle pour (4.47) et puis établir le système d'équations en éléments finis. Supposons que le domaine de calcul est $\Omega = [-L, L]$ avec les conditions aux limites : $\mathbf{w}(x < -L) = \mathbf{w}(x > L) = \mathbf{w}_{,x}(x < -L) = \mathbf{w}_{,x}(x > L) = \mathbf{0}$, la formulation variationnelle du problème (4.47) s'écrit :

Chercher $\mathbf{w}(x, t) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}_3 \times T$ tel que $\forall \delta \mathbf{w} \in \delta \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} & \left[\langle \mathbf{A}_1 \mathbf{w}(x, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{A}_2 \mathbf{w}''(x, t), \delta \mathbf{w}''(x) \rangle_{\Omega} \right. \\ & \quad - \langle \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(x_+, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} + \langle v \mathbf{B}_2 \mathbf{w}'(x_+, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} + \\ & \quad \left. + \langle v^2 \mathbf{B}_3 \mathbf{w}'(x_+, t), \delta \mathbf{w}'(x) \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{B}_4 \mathbf{w}''(x_+, t), \delta \mathbf{w}''(x) \rangle_{\Omega} \right] \\ & + \left[\langle \mathbf{A}_3 \dot{\mathbf{w}}(x, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} - \langle \mathbf{B}_5 \dot{\mathbf{w}}(x_+, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} \right. \\ & \quad \left. - \langle v \mathbf{B}_6 \dot{\mathbf{w}}'(x_+, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} - \langle v^2 \mathbf{B}_7 \dot{\mathbf{w}}'(x_+, t), \delta \mathbf{w}'(x) \rangle_{\Omega} \right] \\ & + \left[\langle \mathbf{A}_4 \ddot{\mathbf{w}}(x, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{B}_8 \ddot{\mathbf{w}}(x_+, t), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} \right] \\ & = \langle \mathbf{F}_1(t) \delta(x) + \mathbf{F}_2(t) \delta(x_+), \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} + \langle \mathbf{G}, \delta \mathbf{w}(x) \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.48)$$

où \mathcal{W} et $\delta \mathcal{W}$ sont les espaces de fonctions solutions et de fonctions test. La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ est définie par : $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\Omega} = \int_{-L}^L \mathbf{a}_j \mathbf{b}_j dx$.

En introduisant la matrice de fonctions d'interpolation \mathbf{N} , on peut déterminer les matrices et les vecteurs élémentaires de ce système :

$$\mathbf{M}^e = (\mathbf{N}^t \mathbf{A}_4 \mathbf{N})_{\Omega^e} + (\mathbf{N}^t \mathbf{B}_8 \mathbf{N}_+)_{\Omega^e} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{C}^e = (\mathbf{N}^t \mathbf{A}_3 \mathbf{N})_{\Omega^e} - (\mathbf{N}^t \mathbf{B}_5 \mathbf{N}_+)_{\Omega^e} - (v \mathbf{N}^t \mathbf{B}_6 \mathbf{N}'_+)_{\Omega^e} - (v^2 \mathbf{N}'^t \mathbf{B}_7 \mathbf{N}'_+)_{\Omega^e} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= (\mathbf{N}^t \mathbf{A}_1 \mathbf{N})_{\Omega^e} + (\mathbf{N}''^t \mathbf{A}_2 \mathbf{N}'')_{\Omega^e} - (\mathbf{N}^t \mathbf{B}_1 \mathbf{N}_+)_{\Omega^e} \\ & \quad + (v \mathbf{N}^t \mathbf{B}_2 \mathbf{N}'_+)_{\Omega^e} + (v^2 \mathbf{N}'^t \mathbf{B}_3 \mathbf{N}'_+)_{\Omega^e} + (\mathbf{N}''^t \mathbf{B}_4 \mathbf{N}''_+)_{\Omega^e} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{N}^t \mathbf{F}_1(t) \delta(x))_{\Omega^e} + (\mathbf{N}^t \mathbf{F}_2(t) \delta(x_+))_{\Omega^e} + (\mathbf{N}^t \mathbf{G})_{\Omega^e} \quad (4.52)$$

et le problème global après l'assemblage revient à un système d'équations dynamiques classiques dont l'excitation extérieure est fixe en espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{w}(t) &= \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{0} ; \quad \dot{\mathbf{w}}(x, 0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(4.53)

qu'on peut résoudre par les procédures d'intégration directe normales.

REMARQUE 4.2.1

1. On utilise ici une matrice \mathbf{N} qui est construite à partir de la fonction d'interpolation de Hermite pour la poutre (w_r) et des fonctions d'interpolation linéaires pour w_j et w_{j+1} . Au point $x \in [x_i, x_{i+1}]$, cette fonction \mathbf{N} permet d'évaluer le vecteur $\mathbf{w}(x, t)$ à partir des valeurs aux 2 noeuds ($i, i+1$) comme suit :

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{N}(x) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_i(t) \\ \mathbf{w}_{i+1}(t) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

où $\mathbf{w}_i = \{w_r, \theta_r, w_2, \dots, w_n\}_i^t$ ($\theta_{ri} = w'_{ri}$ est la rotation de la poutre au noeud i), $\mathbf{N}(x)$ s'écrit donc sous la forme de la matrice $n \times 2(n+1)$ suivante :

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & \cdot & 0 & N_3 & N_4 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^j & \cdot & 0 & 0 & 0 & N_2^j & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & N_1^n & 0 & 0 & 0 & \cdot & N_2^n \end{bmatrix}_{n \times 2(n+1)} \quad (4.55)$$

où :

$$N_1 = \frac{-(x - x_{i+1})^2[-h + 2(x_i - x)]}{h^3} \quad ; \quad N_2 = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{h^2} \quad (4.56)$$

$$N_3 = \frac{(x - x_i)^2[h + 2(x_{i+1} - x)]}{h^3} \quad ; \quad N_4 = \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} \quad (4.57)$$

$$N_1^j = \frac{x_{i+1} - x}{h} \quad ; \quad N_2^j = \frac{x - x_i}{h} \quad (4.58)$$

2. Dans les formulations des matrices élémentaires, il y a des intégrations avec un décalage qui portent sur \mathbf{N}_+ . De même façon que pour la méthode présentée dans le chapitre précédent, ces intégrations sont calculées sur deux éléments et les matrices élémentaires qu'on doit utiliser ont la dimension de $2(n+1) \times 2(n+1)$. Dans le cas non-linéaire, elles sont calculées par la technique d'intégration des points de Gauss.

REMARQUE 4.2.2

1. Le système d'équations dynamiques dans le repère mobile peut être résolu en utilisant un certain schéma d'intégration directe (par exemple Newmark) et sa solution stationnaire est obtenue après le régime transitoire. On remarque que cette solution transitoire n'est pas la vraie solution transitoire du problème (4.4). En fait, la solution statique ici est celle du problème où la charge est constante. La solution transitoire équivalente à celle du problème où on a la structure en régime permanent due à une charge constante et puis la charge commence à varier en fonction du temps.
2. Dans le cas où on a une charge constante qui se déplace avec une vitesse v , l'équation dans le repère mobile est statique, la solution stationnaire peut être trouvée directement en résolvant le système d'équations statique :

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (4.59)$$

4.2.4 Etude paramétrique

On va étudier la précision des équations discrétisées en éléments finis données par les équations proposées. Pour simplifier le problème, on va considérer un problème où on a seulement la poutre couplée avec les ressorts de Winkler. L'équation dynamique devient scalaire et est définie par :

$$\rho S \ddot{w}(x, t) + \eta \dot{w}(x, t) + kw(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = -f_0(t) \delta(x - vt) \quad (4.60)$$

Le système d'équations des éléments finis dont les matrices élémentaires sont présentées dans l'annexe C nous donne à chaque noeud une équation de type différence finie comme suit :

$$\sum_{\ell=-1,2} a_\ell^m \ddot{w}_{i+\ell} + b_\ell^m \ddot{\theta}_{i+\ell} + a_\ell^c \dot{w}_{i+\ell} + b_\ell^c \dot{\theta}_{i+\ell} + a_\ell^k w_{i+\ell} + b_\ell^k \theta_{i+\ell} = 0 \quad (4.61)$$

où $a^m, b^m, a^c, b^c, a^k, b^k$ sont des coefficients constants qui sont évalués en fonction de ρ, η, k, E, S et h ($h = x_{i+1} - x_i$). On dit que ce schéma de différence finie est convergent si :

$$f(h) = \sum_{\ell=-1,2} \left[a_\ell^m(h) \ddot{w}(x + \ell h) + b_\ell^m(h) \ddot{\theta}(x + \ell h) + a_\ell^c(h) \dot{w}(x + \ell h) + b_\ell^c(h) \dot{\theta}(x + \ell h) + a_\ell^k(h) w(x + \ell h) + b_\ell^k(h) \theta(x + \ell h) \right] \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0 \quad (4.62)$$

On développe ce polynôme en série de Taylor pour mesurer l'erreur pour différentes valeurs des paramètres α_m , α_f , β_1 , β_2 et Δt . Par exemple, on peut expliciter le développement jusqu'au 6^e ordre dans le cas où $\alpha_m = 0.25$, $\alpha_f = 0.5$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$, $\Delta t = h/v$ (les mêmes que ceux utilisés pour le cas uniaxial) avec l'aide de **Mathematica** :

$$\begin{aligned} f(h) &\approx \frac{h^3}{4v^2} g(x, t) + \frac{h^4}{8v^2} D^{(1)} g(x, t) + \frac{19h^5}{480v^2} D^{(2)} g(x, t) \\ &\quad + \frac{h^5 v}{24v^2} D^{(3)} \left(\eta w(x, t) + 2m\dot{w}(x, t) - \frac{3m}{2} w'(x, t) \right) + \mathcal{O}(h^6) \\ &= \frac{h^3}{4v^2} \left[g(x, t) + \frac{h}{2} D^{(1)} g(x, t) + \frac{19h^2}{120} D^{(2)} g(x, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2 v}{6} D^{(3)} \left(\eta w(x, t) + 2m\dot{w}(x, t) - \frac{3m}{2} w'(x, t) \right) + \mathcal{O}(h^3) \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

où $g(x, t)$ est l'équation (4.60) écrite dans le repère mobile :

$$\begin{aligned} g(x, t) &:= \rho S \ddot{w}(x, t) - 2\rho S v \dot{w}'(x, t) + \rho S v^2 w''(x, t) \\ &\quad + \eta \dot{w}(x, t) - \eta v w'(x, t) + k w(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Comme $g(x, t) = 0$, l'erreur de cette approximation s'exprime par :

$$e(h) = \frac{h^2 v}{6} D^{(3)} \left(\eta w(x, t) + 2m\dot{w}(x, t) - \frac{3m}{2} w'(x, t) \right) + \mathcal{O}(h^3) \quad (4.65)$$

On a testé avec plusieurs valeurs de α_m , α_f , β_1 , β_2 et on a vérifié que l'erreur est toujours plus petite avec ces valeurs des paramètres : $\alpha_m = 0.25$, $\alpha_f = 0.5$, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$, $\Delta t = h/v$. On va les utiliser dans tous les calculs suivants.

4.3 Validation

La validation est réalisée dans un cas simple où on considère un problème linéaire d'une poutre posée sur la fondation de Winkler. La charge est soit constante soit harmonique. Les résultats numériques obtenus par la méthode proposée sont comparés avec ceux obtenus par une méthode semi-analytique.

4.3.1 Vibration linéaire harmonique stationnaire.

On présente ici les phénomènes vibratoires dans un cas plus simple d'une poutre posée sur la fondation de Winkler soumise à une charge harmonique. La solution est obtenue par un calcul semi-analytique. Le régime stationnaire est cherché. En notant ρS , EI , η , k respectivement la masse, la rigidité en flexion de la poutre, l'amortissement et la rigidité du système des ressorts, l'équation d'équilibre dynamique du problème se représente par :

$$\rho S \ddot{w}(x, t) + \eta \dot{w}(x, t) + k w(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = -f_0 e^{-i\omega t} \delta(x - vt) \quad (4.66)$$

Par un changement de variable $x := x - vt \Rightarrow w(x, t) := w(x - vt, t)$, l'équation dans le repère mobile devient :

$$\begin{aligned} \rho S \ddot{w}(x, t) + \eta \dot{w}(x, t) - 2\rho S v \dot{w}'(x, t) + k w(x, t) - \eta v w'(x, t) \\ + \rho S v^2 w''(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = -f_0 e^{-i\omega t} \delta(x) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Comme la force est harmonique de fréquence ω , la solution stationnaire de cette équation peut être écrite sous la forme :

$$w(x, t) = w_0 e^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (4.68)$$

Remplaçons cette solution dans (4.67), on obtient le polynôme caractéristique :

$$\kappa^4 - \frac{\rho S v^2}{EI} \kappa^2 - \frac{(2\rho S \omega + i\eta)v}{EI} \kappa + \frac{k - i\eta\omega - \rho S \omega^2}{EI} = 0 \quad (4.69)$$

Cette équation a quatre racines qui sont a priori complexes : $\kappa_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1 \div 4$ où α_j, β_j sont réels. α_j représente la propagation et β_j représente l'atténuation de l'onde j . Physiquement, avec la présence d'une petite valeur d'amortissement, seules les ondes avec des amplitudes finies à l'infini sont acceptées.

La direction de chaque composante d'onde j dépend strictement des signes de α_j et β_j et dans la plupart des cas, on peut distinguer deux ondes à gauche et deux ondes à droite de la force. La solution générale peut donc se représenter par :

$$w(x, t) = A_1 e^{-\beta_1 x + i(\alpha_1 x - \omega t)} + A_2 e^{-\beta_2 x + i(\alpha_2 x - \omega t)} \quad x > 0 \quad (4.70)$$

$$w(x, t) = A_3 e^{-\beta_3 x + i(\alpha_3 x - \omega t)} + A_4 e^{-\beta_4 x + i(\alpha_4 x - \omega t)} \quad x < 0 \quad (4.71)$$

On définit la rotation θ , le moment de flexion M , l'effort tranchant T :

$$\theta(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad ; \quad M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad ; \quad T(x, t) = EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \quad (4.72)$$

qui peuvent être déterminés en fonction des inconnues A_1, A_2, A_3, A_4 en dérivant la solution générale. Ces inconnues sont déterminées à partir des conditions de continuité au point $x = 0$:

$$w(0^-, t) = w(0^+, t) \quad ; \quad \theta(0^-, t) = \theta(0^+, t) \quad (4.73)$$

$$M(0^-, t) = M(0^+, t) \quad ; \quad T(0^-, t) = T(0^+, t) + \frac{f_0}{EI} \quad (4.74)$$

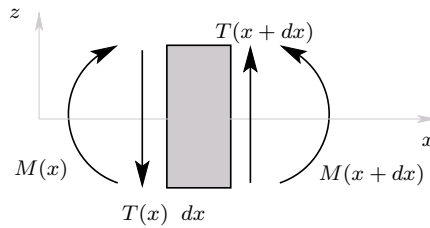


FIGURE 4.2. Définition du moment et de la force tranchante sur un élément de la poutre

Ces conditions donnent les quatre équations linéaires suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & -\gamma_3^2 & -\gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & -\gamma_3^3 & -\gamma_4^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

où $\gamma_j = -\beta_j + i\alpha_j$. En résolvant ces équations, on trouve les amplitudes A_j et par conséquent, la solution $w(x, t)$.

REMARQUE 4.3.1

Afin d'analyser le comportement des κ_j de façon plus générale, on peut convertir (4.69) en une forme non-dimensionnelle en posant $\kappa = \lambda \tilde{\kappa}$ avec $\lambda = \sqrt[4]{\frac{4k}{EI}}$:

$$\tilde{\kappa}^4 - \nu^2 \tilde{\kappa}^2 - \nu(i\zeta + \Omega)\tilde{\kappa} + \frac{1 - \Omega^2 - 2i\zeta\Omega}{4} = 0 \quad (4.76)$$

où on a introduit trois paramètres non-dimensionnels : la fréquence Ω , la vitesse ν et l'amortissement ζ :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \nu = \frac{v}{v_0}, \quad \zeta = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (4.77)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho S}}, \quad v_0 = \sqrt[4]{\frac{4EI k}{(\rho S)^2}}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{\rho S k} \quad (4.78)$$

Les signes des parties réelles et imaginaires de quatre racines ne dépendent que des valeurs de Ω , ν , ζ . Dans le cas où $\Omega = 0$ (charge constante), on peut montrer que l'on peut toujours distinguer 2 ondes à gauche et 2 autres à droite de la charge ([39], chap. 13). Si $\Omega \neq 0$, le problème devient plus compliqué. Une discussion détaillée peut être trouvée dans [7].

4.3.2 Condition absorbante

Afin de réduire la taille du domaine de calcul mais sans perturber le résultat à cause des ondes réfléchies par les frontières, il est nécessaire d'introduire des conditions aux limites spéciales aux frontières.

On propose ici d'ajouter une couche d'éléments dont l'amortissement permet d'absorber les ondes incidentes. Les ondes qui entrent dans cette couche seront atténuées beaucoup plus rapidement mais de telle façon qu'il n'y a pas de réflexion. Notons la taille de la couche absorbante par δ , on définit l'amortissement $\tilde{\eta}$ par une fonction de x :

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} \eta & \text{si } |x| < L \\ \eta + \gamma \left(\frac{|x| - L}{\delta} \right)^4 & \text{si } |x| > L \end{cases} \quad (4.79)$$

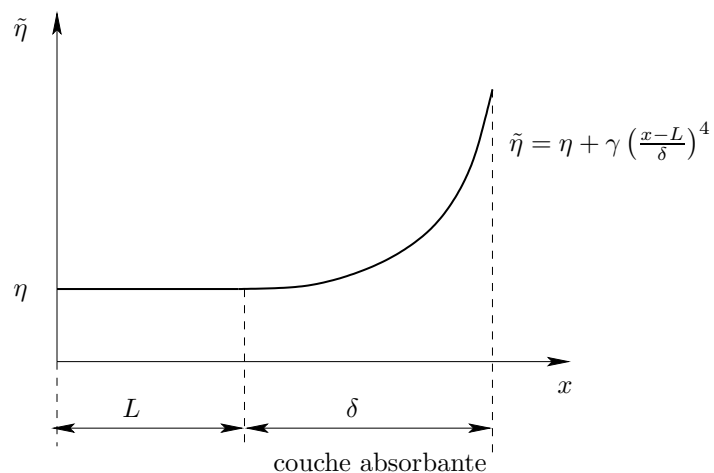


FIGURE 4.3. Fonction de l'amortissement $\tilde{\eta}$ pour la couche absorbante.

En résolvant l'équation (4.66) avec une telle fonction d'amortissement $\tilde{\eta}(x)$, on peut vérifier que la solution n'a pas de discontinuité de w et de ses dérivées au point $x = L$.

La figure 4.4 présente un exemple pour montrer l'effet de la couche absorbante pour un problème où la charge est fixe en espace. On considère une poutre ($EI = 10^8 Nm^2$) qui est posée sur un système de ressorts uniformes ($k = 10^3 Nm^{-2}$) sans amortissement. La force harmonique est appliquée sur le point $x = 0$: $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$, $\omega = 5.8 rad/s$, $f_0 = 1$. Un domaine qui se trouve dans $(-250m, 250m)$ est maillé par 100 éléments identiques. La taille de la couche absorbante est $\delta = 150m$ de chaque côté. On peut constater que les couches absorbantes atténuent les ondes qui se propagent loin de la force et donc la solution dans la partie intéressante est bien en accord avec celle analytique. Comme l'amortissement dans ce cas est nul, le résultat numérique obtenu sans couche absorbante devient très mauvais (la courbe pointillée dans la figure 4.4).

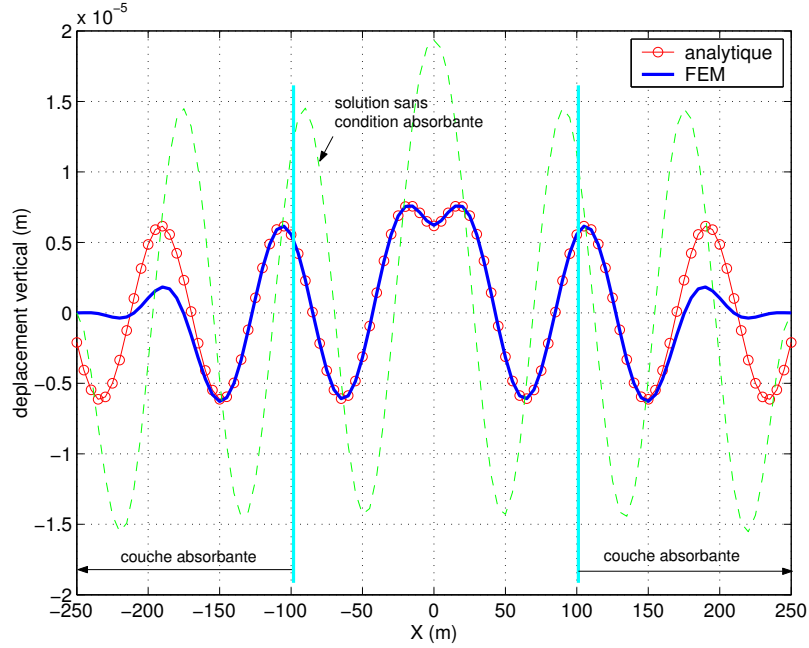


FIGURE 4.4. Effet de la couche absorbante : cas d'une charge fixe harmonique

4.3.3 Comparaison des résultats analytiques et numériques

Pour les exemples numériques, on considère un rail de type UIC60 posé sur un sol solide. Les caractéristiques du rail et du sol sont données dans le tableau 4.1. On détermine aussi les valeurs des paramètres adimensionaux ω_0 , v_0 , η_0 (4.78) qui correspondent aux caractéristiques de ce système.

On présente dans la suite les calculs de validation qui sont effectués avec deux types différents de charge : soit avec une force constante soit avec une force harmonique.

Force constante

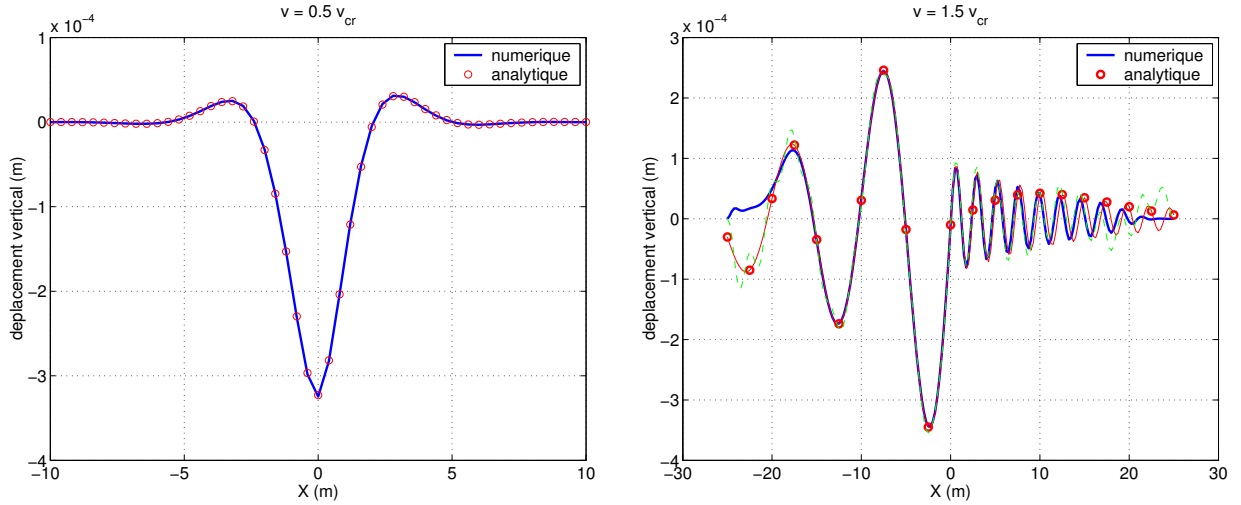
Le régime permanent avec une charge mobile dont l'amplitude est constante peut être obtenu par un calcul statique. La figure (4.5) présente les résultats de déplacement vertical due à une charge de $10 kN$ dans deux cas de vitesse : le cas subsonique ($v = 0.5 v_0$) et le cas supersonique ($v = 1.5 v_0$).

Dans le cas subsonique, la solution est atténuée rapidement, on n'a besoin que de 50 éléments sur une longueur de calcul de $20 m$. La couche absorbante n'est pas nécessaire dans ce cas. Quand la vitesse v dépasse v_0 , la solution devient de type sinusoïdale, en plus, elle est vraiment en haute

TABLEAU 4.1. *Paramètres de la structure*

Rail	Module d'Young (E)	GPa	200
	Masse volumique (ρ)	$kg.m^{-3}$	7850
	Aire de section (S)	cm^2	76.86
	Moment d'inertie de flexion (I)	cm^4	3060
	Masse sur la longueur (ρS)	$kg.m^{-1}$	60.34
	Rigidité en flexion (EI)	Nm^2	6.12×10^6
Fondation de Winkler	Rigidité de ressorts (k)	$N.m^{-2}$	1.6×10^7
	Amortissement (η)	$N.s.m^{-2}$	$0.1 \eta_0$
Paramètres critiques	$\omega_0 = \sqrt{k/\rho S}$	$rad.s^{-1}$	514.8
	$v_0 = \sqrt[4]{4EI k/(\rho S)^2}$	$m.s^{-1}$	405
	$\eta_0 = 2\sqrt{\rho S k}$	$N.s.m^{-2}$	6.2×10^4

fréquence dans la zone devant la force. On utilise alors un maillage de 200 éléments sur une longueur de 50 m où il y a de chaque côté une couche absorbante de longueur $\delta = 25$ m. La courbe pointillée représente le résultat sans utiliser la couche absorbante. Pour obtenir un résultat de même qualité avec une condition aux limites normale, on a besoin d'un maillage de 500 éléments sur une longueur de 100 m.

FIGURE 4.5. *Validation du modèle poutre - fondation de Winkler : cas d'une force constante*

Force harmonique

La validation sur le problème dynamique est réalisée avec une force harmonique dont la fréquence $\omega = 0.5\omega_0$. Deux cas de vitesse (subsonique et supersonique) sont toujours étudiés.

La figure 4.6 présente le résultat stationnaire pour $v = 0.5v_0$ et le déplacement au point $x = 0$ en fonction du temps. La longueur de la poutre calculée est 30 m, le nombre d'éléments est 90. Le pas de temps dt est pris égal à $0.05 \times 2\pi/\omega$. On peut avoir une solution numérique correcte sans la couche absorbante.

Pour le cas supersonique, la solution stationnaire est obtenue plus difficilement. On a besoin d'un maillage de 500 éléments dans un domaine de 100 m pour obtenir le résultat présenté dans la

figure 4.7. Le pas de temps utilisé est $0.02 \times 2\pi/\omega$ et il faut calculer 400 pas pour arriver au régime stationnaire. On voit que les ondes se propagent par groupe et on observe l'effet Doppler à cause de la vitesse de la charge. Les épaisseurs des couches absorbantes prises pour ce calcul sont $25m$.

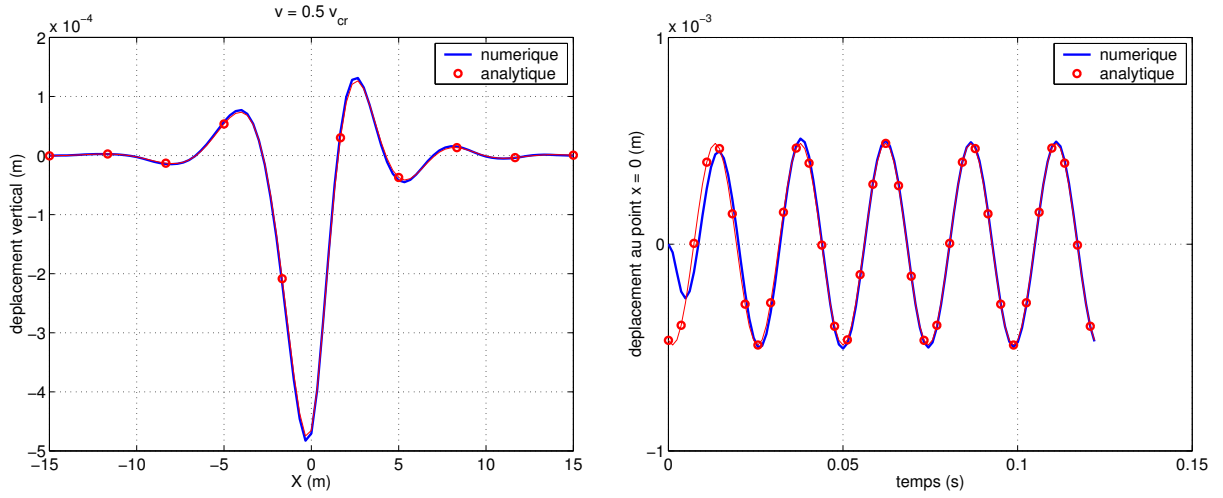


FIGURE 4.6. Validation du modèle poutre - fondation de Winkler : cas d'une force harmonique subsonique

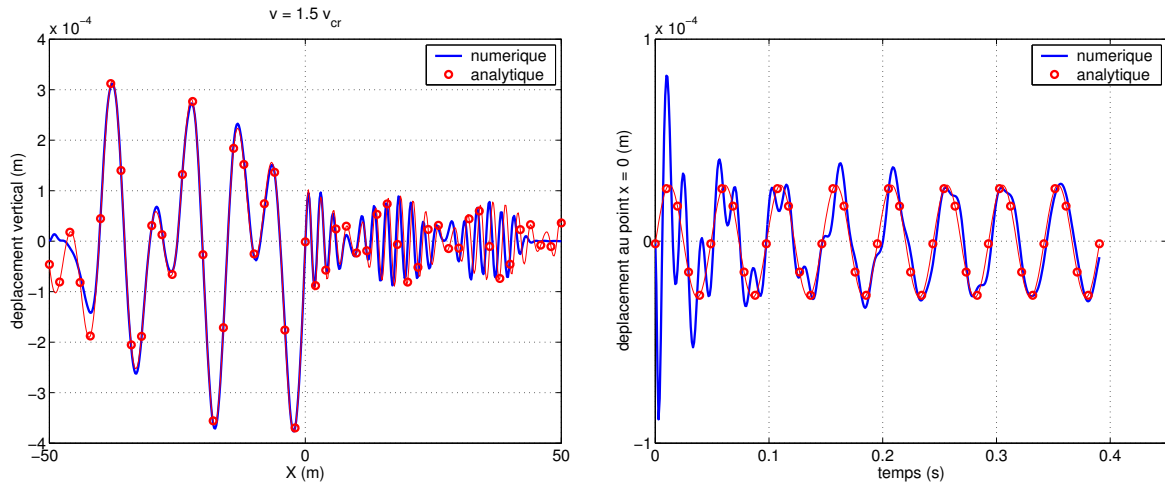


FIGURE 4.7. Validation du modèle poutre - fondation de Winkler : cas d'une force harmonique supersonique

4.4 Conclusion

L'approche numérique pour résoudre le problème 1D de couplage de poutre - masse - ressorts - amortisseurs dans le repère mobile a été proposée. L'avantage est que le problème peut être traité comme dans le cas où la charge est fixe. On a aussi introduit la technique de la couche absorbante qui permet d'éviter l'influence des ondes réfléchies par les frontières rigides. Les comparaisons entre les résultats analytiques et numériques dans des cas simples sont aussi réalisées pour valider l'approche proposée.

Chapitre 5

Etudes sur le modèle 1D des voies

5.1 Introduction

On s'intéresse à la réponse dynamique non-linéaire d'un modèle unidimensionnel de voies soumises à une charge mobile en fonction de la vitesse, de la fréquence de la charge, et aussi de la nonlinéarité de la structure. La méthode de calcul par éléments finis 1D dans le repère mobile a été proposée et validée dans le chapitre précédent. On va l'utiliser dans cette partie pour étudier les deux modèles suivants :

- Le modèle simple représentant une voie posée sur une fondation élastique. Il est modélisé par un système de poutre-ressort-amortisseur.
- Le modèle complexe représentant la structure des voies ballastées. Il est modélisé par le couplage entre une poutre et un système multicouche de masses-ressorts-amortisseurs.

On va désigner ces deux modèles respectivement par *le modèle P1R* et *le modèle P3R* (qui représentent les couplages entre une **P**outre et un système de **1** ou **3** **R**essorts).

5.1.1 Modèle P1R

Le schéma de ce modèle est présenté dans la figure 5.1. La structure est caractérisée par la masse de section ρS et la rigidité en flexion EI de la poutre et aussi par la rigidité k et l'amortissement η de la fondation.

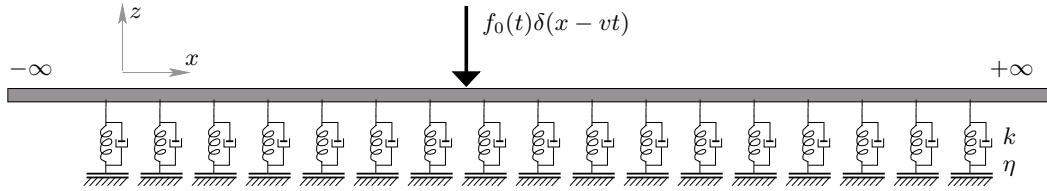


FIGURE 5.1. *Modèle P1R*

On rappelle l'équation d'équilibre dynamique pour ce modèle :

$$\begin{aligned}
 &(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : \\
 &\rho S \ddot{w}(x, t) + \eta \dot{w}(x, t) + kw(x, t) + EI w^{(4)}(x, t) = -f_0(t)\delta(x - vt) - \rho Sg \\
 &w(x, 0) = w_0 \quad ; \quad \dot{w}(x, 0) = v_0
 \end{aligned}$$

(5.1)

5.1.2 Modèle P3R

5.1.2.1 Modélisation simple de la voie ferrée

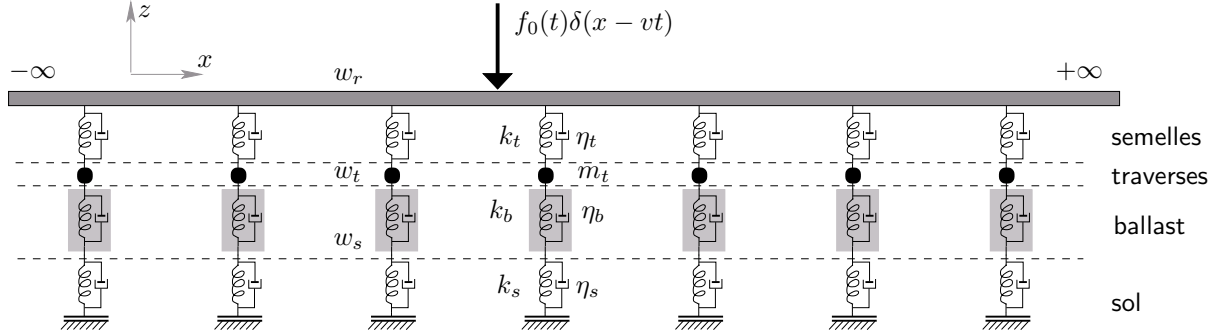


FIGURE 5.2. Modèle simplifié du système de rail-bloquets-ballast-sol : P3R

Ce modèle simplifié considère la structure de couplage entre le rail, les semelles, les traverses (bloquets), le ballast et le sol comme un système 1D non-linéaire de poutres-masses-ressorts-amortisseurs. Ce système est considéré comme une structure qui est infinie et homogène en direction horizontale. La figure 5.2 donne une illustration de ce modèle où on a utilisé les hypothèses suivantes :

- Le rail est une poutre en flexion linéaire. Il peut alors être modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli. On désigne par ρ_r , E_r , S_r , I_r respectivement la masse volumique, le module d'Young, l'aire de la section et le moment d'inertie de flexion du rail.
- Les semelles sont modélisées par un système uniforme de ressorts-amortisseurs k_t , η_t .
- Les traverses qui sont discrètes dans la réalité sont considérées comme un système linéaire continu de masses réparties m_t .
- La couche de ballast où la non-linéarité sera introduite est modélisée par un système uniforme et continu des barres verticales en négligeant les contraintes de cisaillement dans le ballast. Les caractéristiques physiques de cette barre sont représentées par la masse m_b , la rigidité k_b , l'amortissement η_b . Dans le cas non-linéaire, la rigidité k_b est supposée être une fonction du type *unilatéral* de la déformation de la barre.
- Le sol est supposé toujours linéaire et est modélisé comme une fondation de Winkler dont la rigidité et l'amortissement sont respectivement k_s et η_s .
- La charge est une force ponctuelle qui se déplace en direction x avec une vitesse constante v . Son amplitude est soit constante soit variable en fonction du temps.

5.1.2.2 Système d'équations dynamiques

Les inconnues à déterminer dans le modèle présenté sont les déplacements, les vitesses et les accélérations aux niveaux du rail, de la surface supérieure du ballast (qui sont identiques à ceux des traverses) et de la surface du sol. On note w_r , w_t et w_s ces trois déplacements inconnus.

Afin d'obtenir le système d'équations dynamiques du problème global, on va d'abord écrire séparément les équations dynamiques de chaque composante en fonction des forces de réaction entre eux : le rail, les traverses et le ballast (Figure 5.3). En prenant en compte aussi la force volumique, les équations d'équilibre dynamiques s'écrivent comme suit :

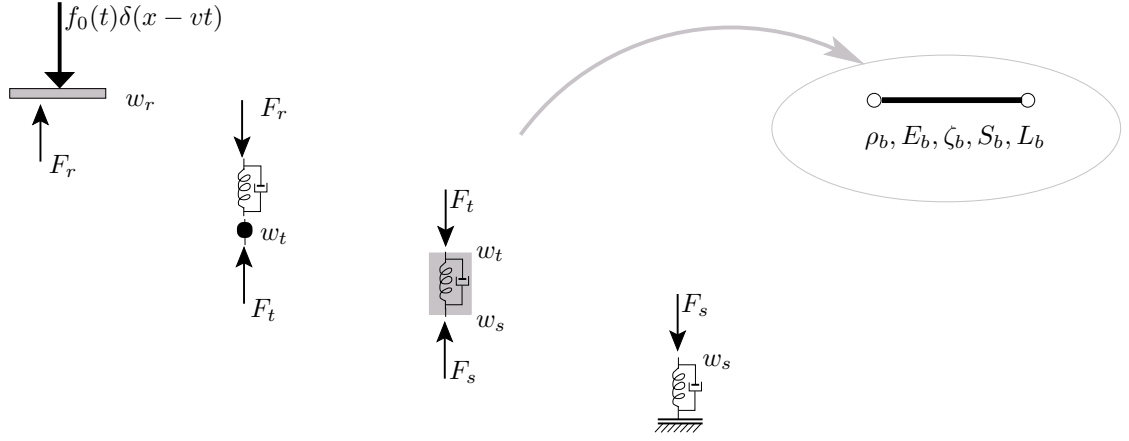


FIGURE 5.3.

- Pour le rail et les semelles : équation dynamique de la poutre d'Euler-Bernoulli en flexion soumise à une force $f_0(t)$ et la force F_r distribuée par le système des ressorts :

$$\rho_r S_r (\ddot{w}_r + g) + E_r I_r w_r^{(4)} = F_r - f_0(t)\delta(x - vt) \quad (5.2)$$

- Pour les traverses : équation dynamique des corps rigides avec les ressorts-amortisseurs :

$$m_t(\ddot{w}_t + g) + k_t(w_t - w_r) + \eta_t(\dot{w}_t - \dot{w}_r) = F_t \quad (5.3)$$

- Pour le ballast : équation dynamique uniaxiale d'une barre avec les paramètres : ρ_b (masse volumique), E_b (module d'élasticité), ζ_b (amortissement), S_b (aire de la section) et L_b (longueur). En considérant cette barre comme un élément barre de deux noeuds dont deux degrés de liberté sont w_t et w_s avec deux forces extérieures F_t, F_s , l'équation dynamique en élément fini s'écrit (voir dans le chapitre 3 pour les matrices élémentaires d'une barre) :

$$\frac{m_b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_t + g \\ \ddot{w}_s + g \end{Bmatrix} + \frac{\eta_b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w}_t \\ \dot{w}_s \end{Bmatrix} + k_b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_t \\ w_s \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_t \\ -F_s \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

où on a posé :

$$m_b = \rho_b S_b L_b \quad ; \quad \eta_b = \zeta_b L_b \quad ; \quad k_b = \frac{E_b S_b}{L_b} \quad (5.5)$$

La notation g désigne l'accélération de la gravité ($g \approx 9.81 \text{ms}^{-2}$).

Il reste deux équations supplémentaires qui permettent de calculer les forces dans les ressorts des semelles k_t (dont la déformation est $(w_r - w_t)$) et du sol k_s (dont la déformation est w_s) :

$$F_r = -k_t(w_r - w_t) - \eta_t(\dot{w}_r - \dot{w}_t) \quad (5.6)$$

$$F_s = -k_s w_s - \eta_s \dot{w}_s \quad (5.7)$$

On a 6 équations pour 6 inconnues. En éliminant les forces F_t, F_r, F_s , on obtient un système de 3 équations dynamiques pour les 3 inconnues w_r, w_t, w_s :

$$\begin{cases} \rho_r S_r \ddot{w}_r + E_r I_r w_r^{(4)} + k_t(w_r - w_t) + \eta_t(\dot{w}_r - \dot{w}_t) = -f_0(t)\delta(x - vt) - \rho_r S_r g \\ \left(m_t + \frac{m_b}{3}\right) \ddot{w}_t + \frac{m_b}{6} \ddot{w}_s - \eta_t \dot{w}_r + \left(\eta_t + \frac{\eta_b}{3}\right) \dot{w}_t + \frac{\eta_b}{6} \dot{w}_s \\ \quad - k_t w_r + (k_t + k_b) w_t - k_b w_s = -\left(m_t + \frac{m_b}{2}\right) g \\ \frac{m_b}{6} \ddot{w}_t + \frac{m_b}{3} \ddot{w}_s + \frac{\eta_b}{6} \dot{w}_t + \left(\frac{\eta_b}{3} + \eta_s\right) \dot{w}_s - k_b w_t + (k_b + k_s) w_s = -\frac{m_b g}{2} \end{cases} \quad (5.8)$$

Par commodité dans le calcul, on note $\mathbf{w} = \{w_r, w_t, w_s\}^t$ et le système (5.8) avec la condition initiale peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : \\ \mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}}(x, t) + \boldsymbol{\eta}\dot{\mathbf{w}}(x, t) + \mathbf{k}\mathbf{w}(x, t) + \mathbf{j}\mathbf{w}^{(4)}(x, t) = -\mathbf{f}_0(t)\delta(x - vt) - \mathbf{g} \\ \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{w}}(x, 0) = \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

où :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \rho_r S_r & 0 & 0 \\ 0 & m_t + \frac{m_b}{3} & \frac{m_b}{6} \\ 0 & \frac{m_b}{6} & \frac{m_b}{3} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_t & -\eta_t & 0 \\ -\eta_t & \eta_t + \frac{\eta_b}{3} & \frac{\eta_b}{6} \\ 0 & \frac{\eta_b}{6} & \frac{\eta_b}{3} + \eta_s \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_t & -k_t & 0 \\ -k_t & k_t + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b + k_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} E_r I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{f} = \{f_0(t), 0, 0\}^t \quad \mathbf{g} = \left\{ \rho_r S_r g, \left(m_t + \frac{m_b}{2}\right)g, \frac{m_b}{2}g \right\}^t \quad (5.12)$$

On trouve un modèle à 3 inconnues du problème général indiqué dans (4.4). Dans ce modèle, on suppose que la non-linéarité n'apparaît que dans la couche de ballast dont le comportement de type unilatéral est défini comme suit :

$$k_b = \begin{cases} k_b^c & \text{si } w_t \leq w_s \\ k_b^t & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.13)$$

où k_b^c , k_b^t sont deux rigidités différentes qui représentent les résistances de la couche de ballast en compression et en traction. De façon similaire, il faut définir deux valeurs différentes pour l'amortissement η_b en compression et en traction.

REMARQUE 5.1.1

Le vecteur \mathbf{w}_0 de déplacement statique dû à la force de gravité est constant pour tous les points x et est évalué par :

$$\mathbf{w}_0 = -\mathbf{k}^{-1}\mathbf{g} \quad (5.14)$$

5.2 Mise en oeuvre numérique

Vu la méthode présentée dans le chapitre précédent, le système d'équations discrétisées par éléments finis du problème (5.9) peut être établi dans le repère de la charge. Un code de calcul programmé en MATLAB est développé pour traiter deux cas de ce problème :

- Pour la charge constante : on a un système d'équations statiques soit linéaire soit non-linéaire. La solution non-linéaire est trouvée par une procédure itérative de Newton-Raphson.
- Pour la charge variable en fonction du temps : on a un système d'équations dynamiques. La méthode d'intégration directe de Newmark est utilisée pour évaluer la solution en temps. Dans le cas non-linéaire, la procédure de Newton-Raphson doit être réalisée dans chaque pas de temps (voir la section 3.3).

Dans le cas linéaire, les matrices élémentaires peuvent être évaluées analytiquement en supposant que les tailles des éléments sont identiques. Les formules explicites sont données dans l'annexe C. Dans le cas non-linéaire (et aussi pour les éléments qui se trouvent dans la couche absorbante), les matrices élémentaires sont calculées numériquement par points de Gauss.

5.3 Modèle P1R

Les solutions analytique et numérique de ce problème linéaire pour différentes situations de charge ont été présentées dans la partie de validation du chapitre précédent. On va discuter plus en détail dans cette partie des phénomènes physiques dus aux vitesses et aux fréquences dans le cas linéaire et puis avec non-linéarité. Afin d'avoir une idée plus générale sur le problème, les données sont prises en utilisant les paramètres adimensionnels de la vitesse ν , de la fréquence Ω et de l'amortissement ζ qui sont définis par (voir le Remarque 4.3.1) :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \nu = \frac{v}{v_0}, \quad \zeta = \frac{\eta}{\eta_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho S}}, \quad v_0 = \sqrt[4]{\frac{4EI k}{(\rho S)^2}}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{\rho S k}$$

5.3.1 Vitesses et fréquences critiques pour le problème linéaire

Considérons le déplacement au point $x = 0$ avec différentes valeurs de $\nu = v/v_0$, $\zeta = \eta/\eta_0$ et $\Omega = \omega/\omega_0$. On trace dans la figure 5.4 les courbes de ces résultats en fonction de ν (notons que

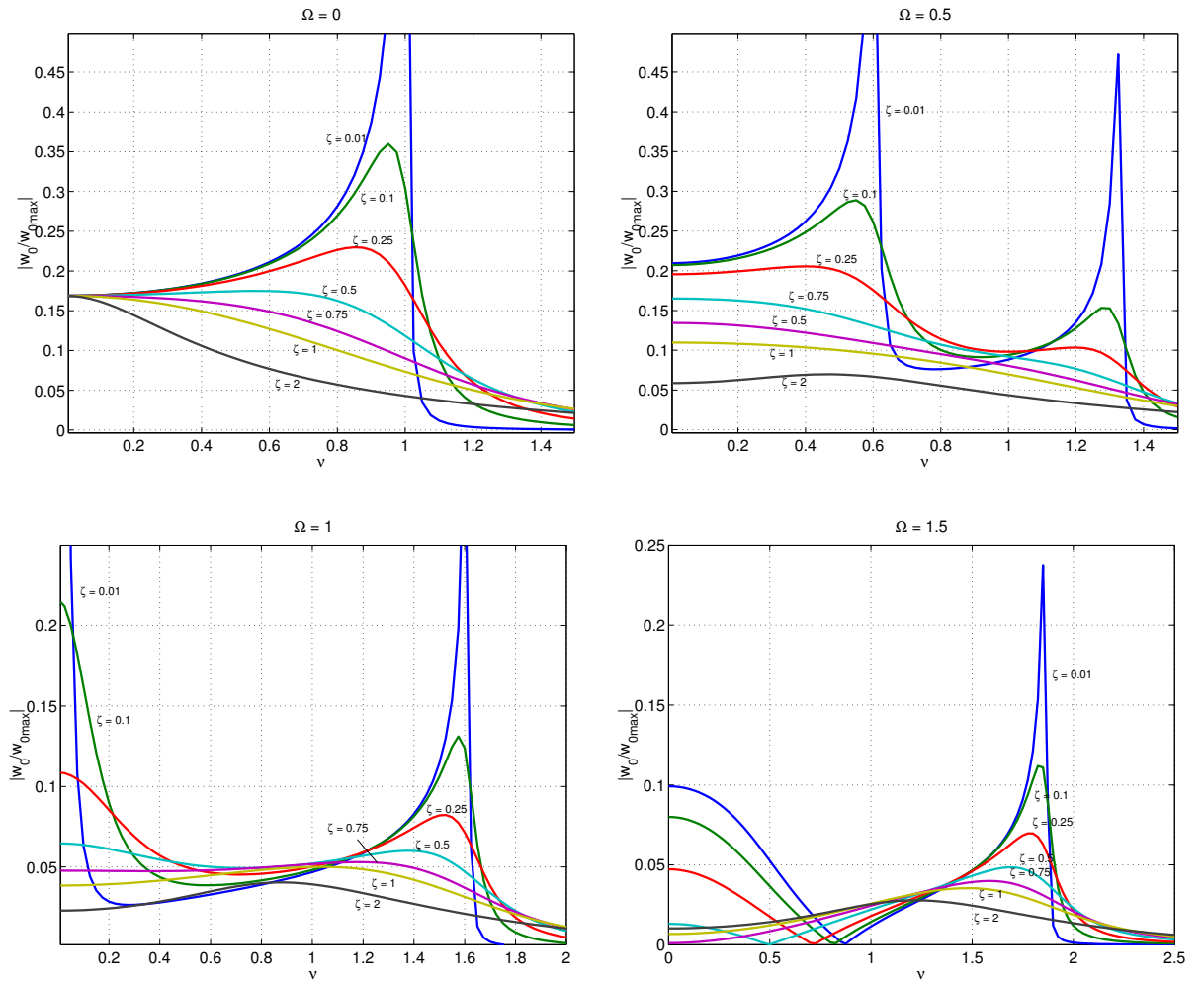


FIGURE 5.4. Déplacement adimensionnel au point $x = 0$ du aux différentes valeurs de vitesse et de fréquence : problème linéaire

w_{0max} est la valeur de déplacement au point $x = 0$ quand $\nu = 1$ et avec un amortissement $\zeta = 0.01$. Les valeurs critiques où il y a la résonance se trouvent aux positions des pics.

Si $\Omega = 0$, i.e. la charge est constante, la résonance apparaît quand $\nu = 1$ ($v = v_0$). En fait, dans ce cas quand $v < v_0$, l'amplitude maximum de déplacement se trouve toujours à la position de la charge ($x = 0$). Dès que $v > v_0$, elle commence à se déplacer à la gauche de la charge, le déplacement du point x_0 diminue. On peut aussi remarquer par cet exemple que si l'amortissement dépasse sa valeur critique ($\zeta \geq 1$), l'amplitude maximum du déplacement diminue en fonction de la vitesse ν .

Les résultats pour $\Omega = 0.5$ représentent un exemple de situation en basse fréquence ($0 < \Omega < 1$). Il existe dans ce cas deux valeurs critiques pour la vitesse avec $v_{cr}^1 < v_0 < v_{cr}^2$. Plus la fréquence de la charge est importante, plus la vitesse critique est petite. Quand $\omega = \omega_0$, la première résonance apparaît si la force est fixe (qui est connu comme un cas classique).

Dans le cas de haute fréquence, $\Omega > 1$, il n'existe qu'une seule valeur de la vitesse critique qui est beaucoup plus importante que v_0 . On peut trouver dans la figure (5.4) à la position de la résonance une valeur $\nu = v/v_0 = 1.8$ pour $\Omega = 1.5$.

Le premier contour dans la figure 5.5 montre la distribution des points de résonance dans la surface (ν, Ω) . Les autres illustrent les influences des amortissements.

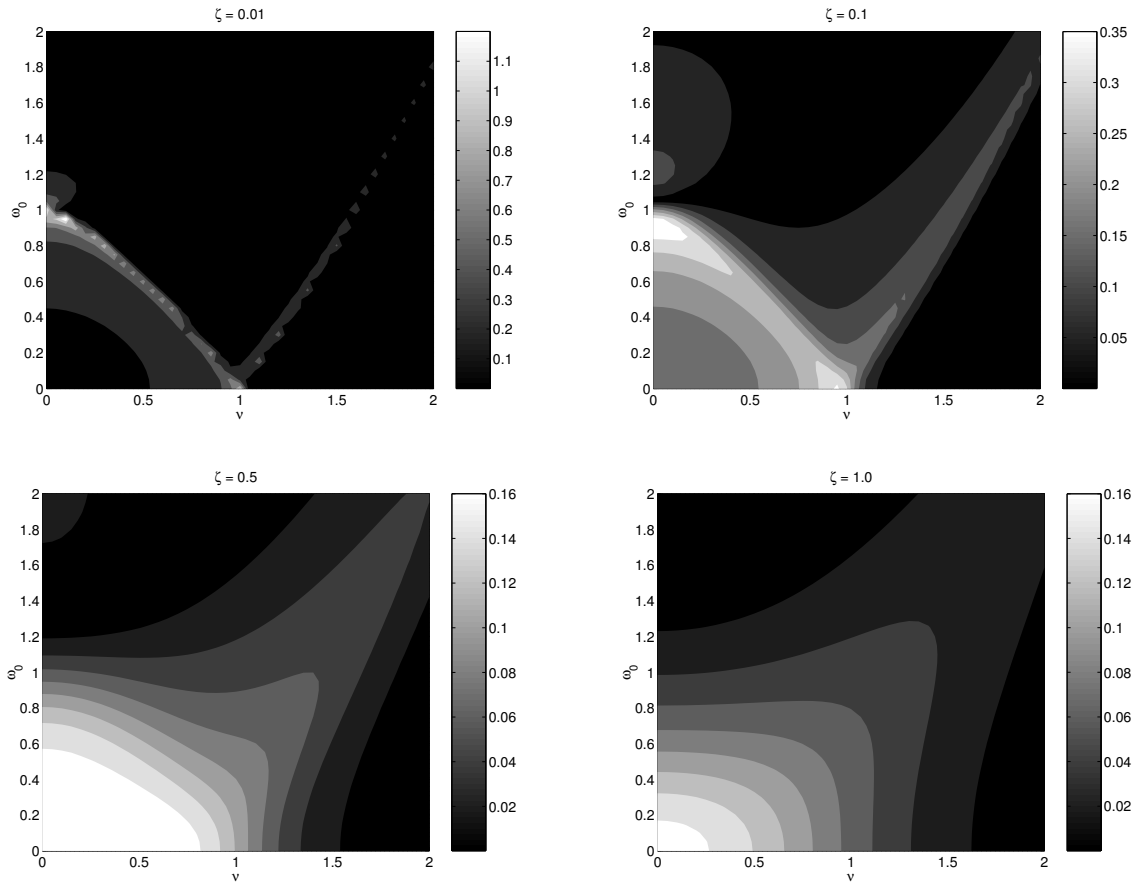


FIGURE 5.5. *Déplacement adimensionnel au point $x = 0$ en fonction de la vitesse et de la fréquence*

La valeur de la vitesse critique a un rôle très important. On présente dans la figure (5.6) les solutions des déplacements dus aux vitesses autour des valeurs critiques dans les 4 cas de fréquences précédents. Un coefficient d'amortissement $\zeta = 0.1$ est utilisé. En passant la vitesse

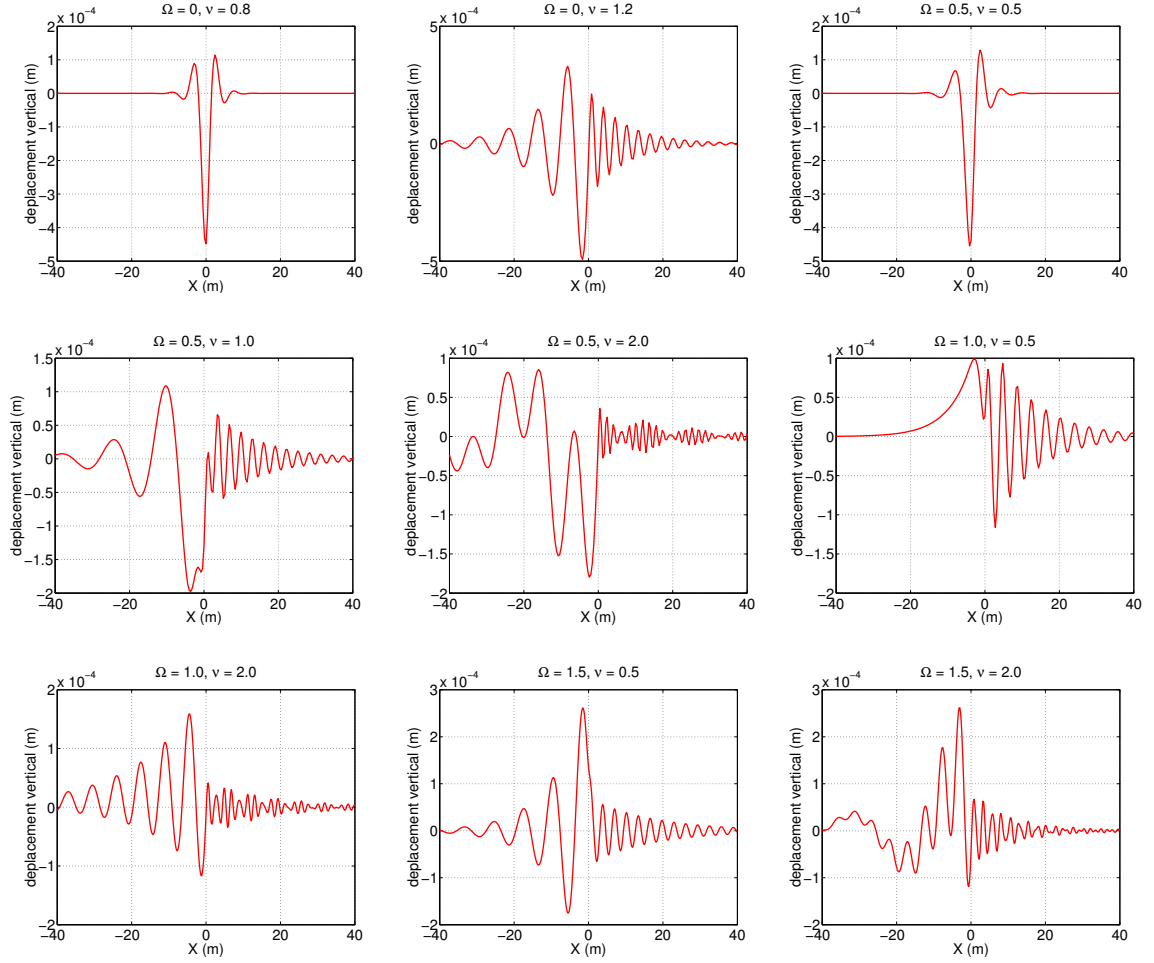


FIGURE 5.6. *Influence de la vitesse et de la fréquence de charge pour le rail posé sur une fondation linéaire de Winkler*

critique (soit du régime subsonique au régime supersonique), la solution change complètement de nature. En plus, on peut constater que dans le régime supersonique, la partie positive du déplacement devient beaucoup plus importante par rapport à celle du régime subsonique (les parties positives et négatives deviennent presque équivalentes). En conséquence, l'influence de la non-linéarité de type unilatéral dans le cas supersonique est sûrement beaucoup plus grave.

On trouve que l'effet Doppler devient très important, notamment dans les cas supersoniques. La vibration du rail dans la partie devant la charge est en très haute fréquence. Le mécanisme de propagation d'ondes par groupe peut être aussi observé dans les cas où la valeur de ν est grande (les cas où $\nu = 2.0$).

5.3.2 Effet de la non-linéarité

On va introduire la non-linéarité dans cet exemple pour voir son influence sur une structure de poutre due à la charge mobile. En supposant que le système de ressorts est plus faible en tension pour représenter le comportement de la couche de ballast, on va utiliser une rigidité de tension k_t qui est inférieure de celle de compression k_c .

Il est évident que dans le cas non-linéaire, les valeurs des vitesses critiques sont changées. La figure 5.7 présente deux courbes de déplacements qui nous permettent de déterminer les vitesses

critiques dans deux cas : $k_t = 1\%k_c$ et $k_t = 50\%k_c$. Seulement le cas d'une charge constante a été traité. La vitesse critique diminue en fonction de la rigidité k_t et vaut 80% de celle du cas linéaire. Néanmoins, ce résultat n'a pas de sens général puisqu'il doit dépendre sûrement aussi de l'amplitude de la charge.

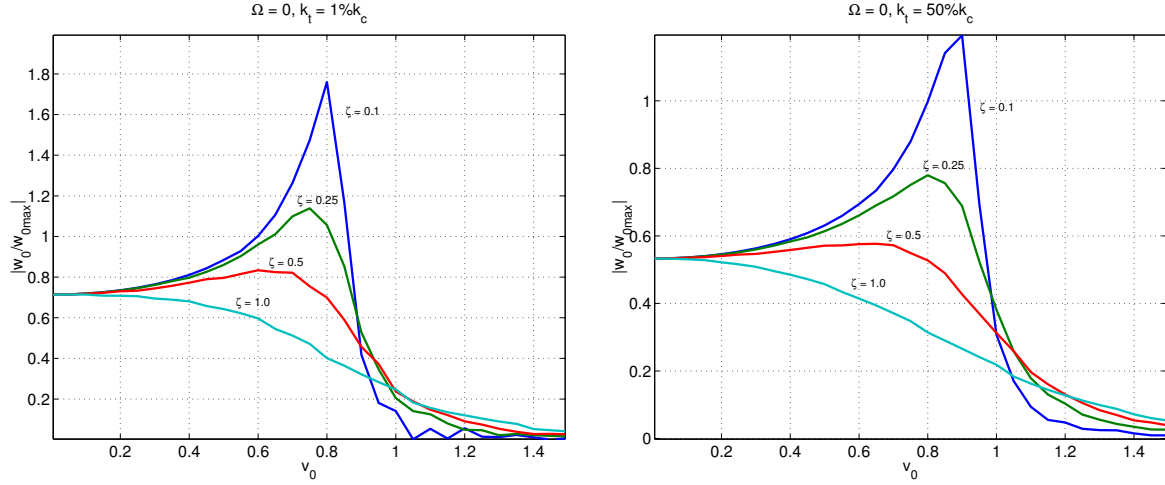


FIGURE 5.7. *Déplacement adimensionnel au point $x = 0$ du aux différentes valeurs de vitesse : problème non-linéaire*

On présente dans la figure 5.8 deux exemples de cas où la rigidité en tension des ressorts est très faible ($k_t = 1\%k_c$). Comme il n'y a que la composante de force de gravité qui peut empêcher le mouvement de la poutre vers le haut, dès que la déformation positive apparaît dans les ressorts, les déplacements deviennent très importants.

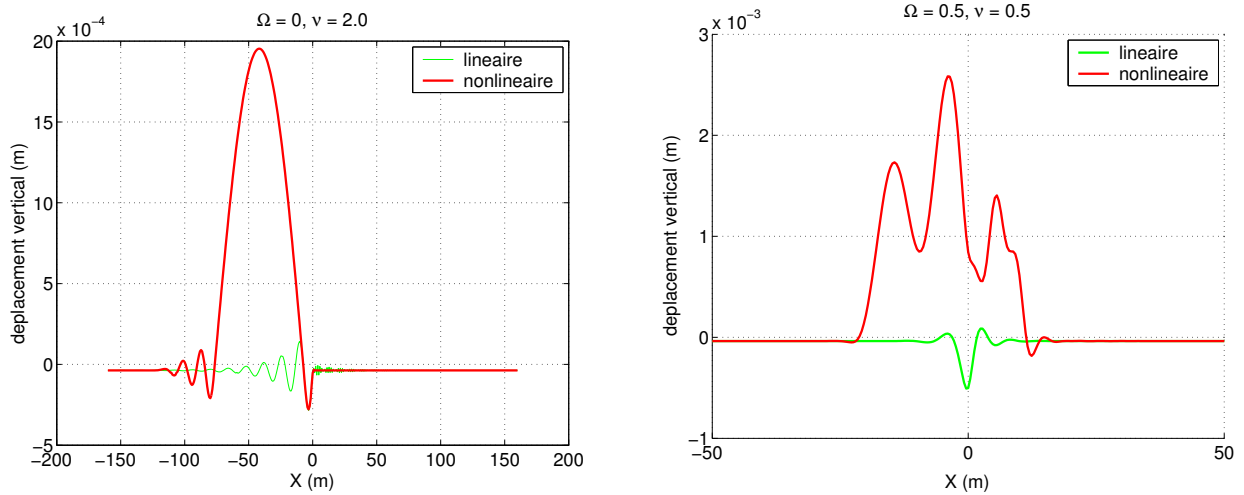


FIGURE 5.8. *Déplacements quand $k_t = 1\%k_c$*

Dans la réalité, la résistance en tension des ressorts n'est pas vraiment nulle, grâce aux forces de cisaillement. La figure 5.9 montre les solutions non-linéaires comparées avec les calculs linéaires. On impose une rigidité de tension qui vaut la moitié de celle de compression ($k_t = 50\%k_c$). La structure est pré-contrainte sous la gravité avant le calcul dynamique, elle a un déplacement statique $w_0 < 0$. La condition pour vérifier si le ressort en un point est en tension est réalisée simplement par $w(x) + w_0 > 0$. Les valeurs de vitesse (v) et de fréquence (ω) utilisées dans ces calculs sont

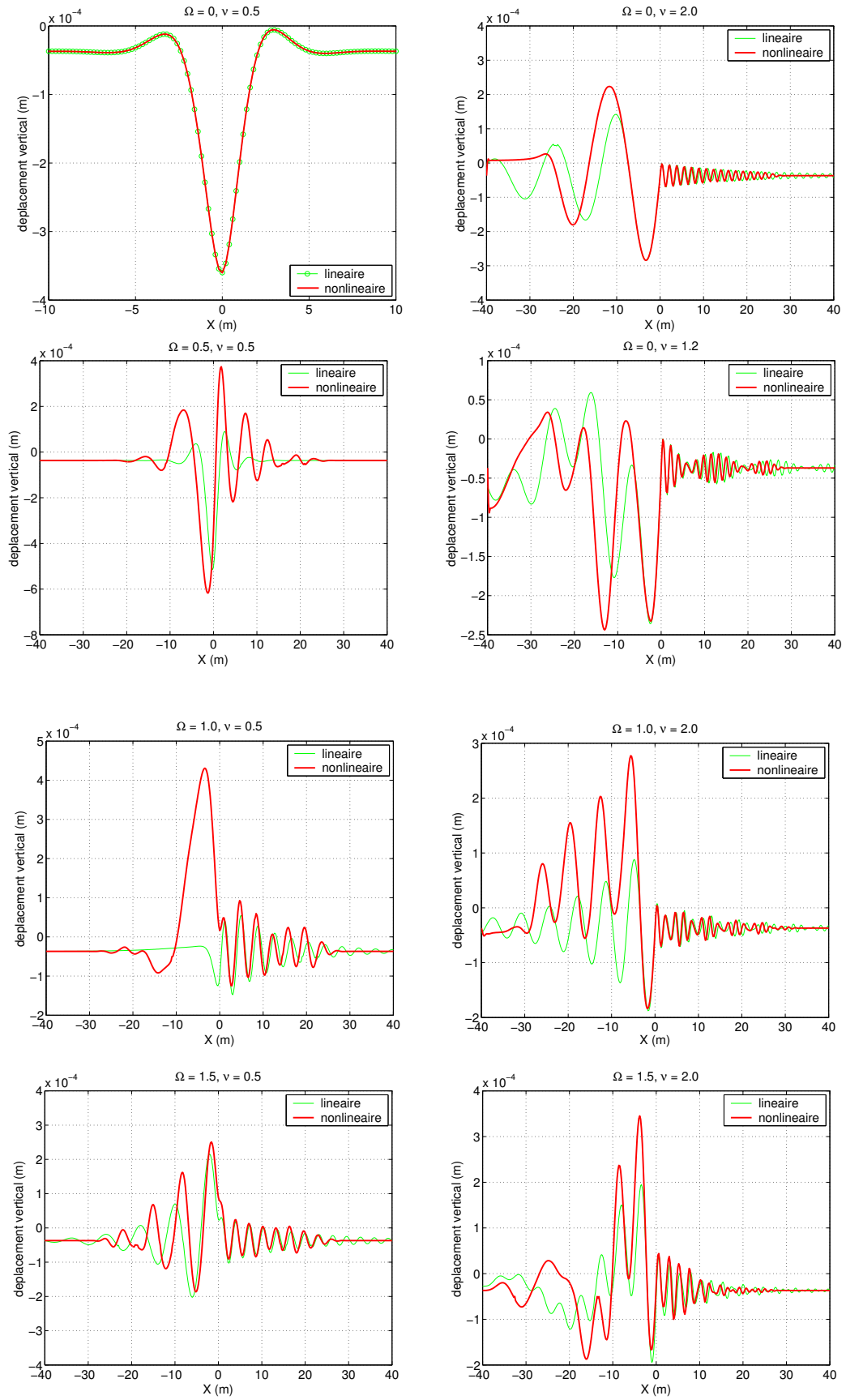


FIGURE 5.9. Influence de la vitesse d'une charge harmonique pour le rail posé sur une fondation non-linéaire de Winkler ($k_t = 50\% k_c$)

toujours calculées avec les valeurs critiques qui correspondent à la rigidité en compression (k_c).

On constate que la présence de la non-linéarité ne change presque pas le mécanisme de propagation d'ondes. Par contre, elle augmente l'amplitude du déplacement. La longueur d'onde est aussi plus grande dans une structure non-linéaire.

5.3.3 Surcharge dynamique sur l'infrastructure.

On a vu dans la section 2.5 une formule analytique de force exercée par le rail sur un blochet qui est proposée par Alaoui et Naciri [4] en utilisant des calculs statiques. On va chercher dans cette partie les surcharges dynamiques dues à la vitesse.

On va déterminer d'abord la rigidité équivalente du sol k qui donne la même force que celle donnée dans [4] dans le cas statique. Rappelons que le signal de force 2.89 du à deux forces de $Q/2$ à la distance $L = 3m$ s'écrit sous la forme suivante :

$$F_{3d}(t, Q, V) = \frac{QY}{2} \left[X\left(\frac{Vt-a}{d}\right)^2 + X\left(\frac{Vt-a-L}{d}\right)^2 \right] \quad (5.15)$$

et si l'on remplace le sol par un système de ressorts, cette force peut être aussi déterminée analytiquement (voir [54]) en faisant attention que la distance entre les traverses est égale à d :

$$\begin{aligned} F_{1d}(t, Q, V) = & \frac{Qd}{4\alpha} \left\{ \exp\left(\frac{-|Vt-a|}{\alpha}\right) \left[\cos\left(\frac{-|Vt-a|}{\alpha}\right) + \sin\left(\frac{-|Vt-a|}{\alpha}\right) \right] + \right. \\ & \left. + \exp\left(\frac{-|Vt-a-L|}{\alpha}\right) \left[\cos\left(\frac{-|Vt-a-L|}{\alpha}\right) + \sin\left(\frac{-|Vt-a-L|}{\alpha}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\alpha = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k}}$. On peut en déduire directement la condition pour que les maximums des deux fonctions F_{3d} et F_{1d} soient les mêmes :

$$\frac{QY}{2} = \frac{Qd}{4\alpha} \quad (5.17)$$

qui donne la rigidité équivalente k :

$$\Rightarrow \boxed{k = 4EI \left(\frac{2Y}{d} \right)^4} \quad (5.18)$$

On présente dans la figure 5.10 la comparaison des forces sur un blochet en fonction du temps dans les deux modèles 3D et 1D. Deux rigidités du sol : $E_s = 100 \text{ MPa}$ et $E_s = 30 \text{ MPa}$ sont utilisées qui donnent respectivement deux valeurs de k : $k = 1.03 \times 10^8 \text{ N/m}$ et $k = 3.17 \times 10^7 \text{ N/m}$. On constate que la fondation de Winkler représente assez bien la fondation 3D si le sol est rigide.

La figure 5.11 présente la comparaison entre les charges statiques et dynamiques. Les calculs sont effectués avec une vitesse de 200 m.s^{-1} en tenant compte de la masse des traverses. Les résultats montrent des différences sensibles dues aux surcharges dynamiques, surtout quand le sol est souple (le cas $E_s = 30 \text{ MPa}$).

5.4 Modèle P3R

Le modèle 1D complexe (rail, semelles, blochets, ballast, sol) sera étudié dans cette partie. Les caractéristiques de la structure sont données dans le tableau 5.1. Ces données, en fait, représentent la structure totale de voie comme un système de poutre-ressort-amortisseur comme suit :

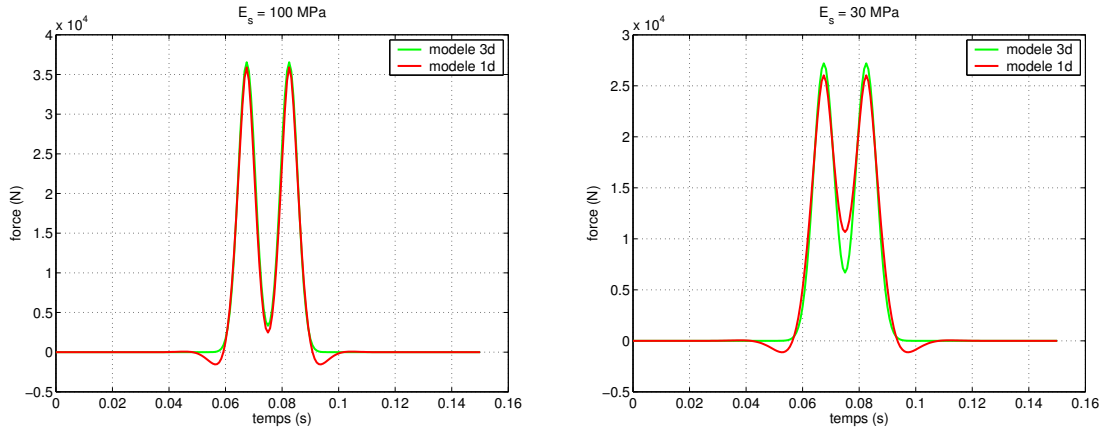


FIGURE 5.10. Force statique sur les bloquets

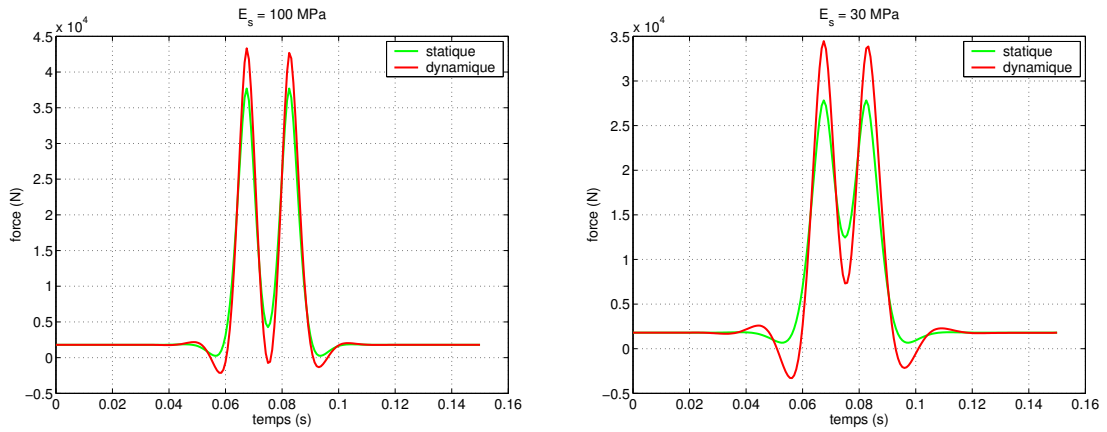


FIGURE 5.11. Effet de la vitesse sur la surcharge dynamique

- Poutre : deux rails du type UIC60.
- (m_t, η_t, k_t) : les bloquets en béton et les semelles en caoutchouc.
- (m_b, η_b, k_b) : la couche de ballast dont le module d'Young est de $50 \div 200 \text{ MPa}$.

TABLEAU 5.1. Paramètres de la structure

Rail	Masse sur la longueur (ρS)	$kg.m^{-1}$	120
	Rigidité en flexion (EI)	Nm^2	1.23×10^7
Semelles & traverses	Masse sur la longueur (m_t)	$kg.m^{-1}$	490
	Facteur d'amortissement ($\bar{\eta}_t$)	$N.s.m^{-2}$	0.15
	Rigidité (k_t)	$N.m^{-2}$	3.5×10^8
Ballast	Masse sur la longueur (m_b)	$kg.m^{-1}$	1200
	Facteur d'amortissement ($\bar{\eta}_b$)	$N.s.m^{-2}$	1.0
	Rigidité (k_b)	$N.m^{-2}$	$(4 \div 16) \times 10^8$
Sol	Facteur d'amortissement ($\bar{\eta}_s$)	$N.s.m^{-2}$	0.1
	Rigidité de ressorts (k)	$N.m^{-2}$	$(2 \div 5) \times 10^7$

- (η_s, k_s) : la structure de plate-forme (sol ...)

On remarque que les amortissements sont calculés à partir de ces facteurs et des valeurs critiques. En sachant que la valeur de d'amortissement critique d'un système simple masse-ressort (m, k) est $\eta_{cr} = 2\sqrt{mk}$, on peut évaluer ici les amortissements η_t, η_b, η_s d'une façon approximative par :

$$\eta_t = \bar{\eta}_t \times 2\sqrt{\rho S k_t}; \quad \eta_b = \bar{\eta}_b \times 2\sqrt{\left(m_t + \frac{m_b}{2}\right) k_b}; \quad \eta_s = \bar{\eta}_s \times 2\sqrt{\frac{m_b k_s}{2}}$$

La couche de ballast dans la réalité est très absorbante. On prend ici pour elle une valeur d'amortissement η_b très importante ($\bar{\eta}_b = 1$).

On regarde dans cette partie les réponses de ce système en fonction des types de charges (vitesse, fréquence) et aussi du comportement de la structure (raideurs, amortissements ...) dans les cas linéaires et non-linéaires.

Dans le calcul statique des voies ferrées, chaque essieu supporte une charge $P = 170 \text{ kN}$. Pour les exemples ici, on va prendre :

- Cas statique : $f = P$.
- Cas dynamique : $f(t) = P + \frac{P}{2} \sin \omega t$.

Influence des vitesses et des fréquences. Le premier exemple est réalisé en supposant que les rigidités du ballast et du sol sont $k_b = 16 \times 10^8 \text{ kN.m}^{-1}$ (pour un module d'Young du ballast de 200 MPa) et $k_s = 5 \times 10^7 \text{ kN.m}^{-1}$. Dans tous les calculs, les déplacements statiques dus aux poids de la structure sont pris en compte. Pour cette structure, ils valent : $w_r = 0.366 \text{ mm}$, $w_t = 0.3625 \text{ mm}$ et $w_s = 0.355 \text{ mm}$.

La structure est calculée avec 2 vitesses différentes $v = 100, 200 \text{ m.s}^{-1}$ et 3 fréquences différentes $f_0 = 0, 5, 10 \text{ Hz}$. Pour les cas dynamiques, les calculs sont effectués pendant 4 périodes afin d'arriver au régime stationnaire (des pas de temps qui valent $dt = 0.05 \times \frac{2\pi}{\omega}$ sont utilisés pour trouver des résultats stables dans le schéma de Newmark).

- *Sur le déplacement.* Les résultats des déplacements aux trois niveaux w_r, w_t et w_s par éléments finis sont présentés dans la figure 5.12. Les solutions sont tracées aux derniers pas de temps (quand $f(t) = P$).

On constate que deux valeurs de déplacement aux niveaux des traverses w_t et du sol w_s sont très proches car la couche de ballast est très rigide par rapport aux semelles et au sol. Les déplacements qui décroissent très lentement derrière la force montrent l'effet de l'amortissement important dans la structure. Ainsi, le déplacement maximum ne change pas beaucoup en fonction de la vitesse et de la fréquence grâce aux amortissements.

Quand la charge devient harmonique, la vibration de la partie $X < 0$ est influencée nettement par la fréquence f_0 . Au contraire, la partie $X > 0$ ne change presque pas.

- *Sur l'accélération et la déformation de la couche de ballast.* Pour la couche de ballast, il est aussi intéressant de considérer les deux cas dangereux suivants :

- quand l'accélération verticale positive (vers en haut) dans la couche de ballast dépasse la gravité : les cailloux peuvent sauter. On vérifie la condition : $\gamma_t = \ddot{w}_t > g$ pour cette situation.
- quand la couche de ballast n'est plus en compression, une discontinuité va apparaître dans cette couche. On vérifie la condition $w_t - w_s > 0$ pour cette situation.

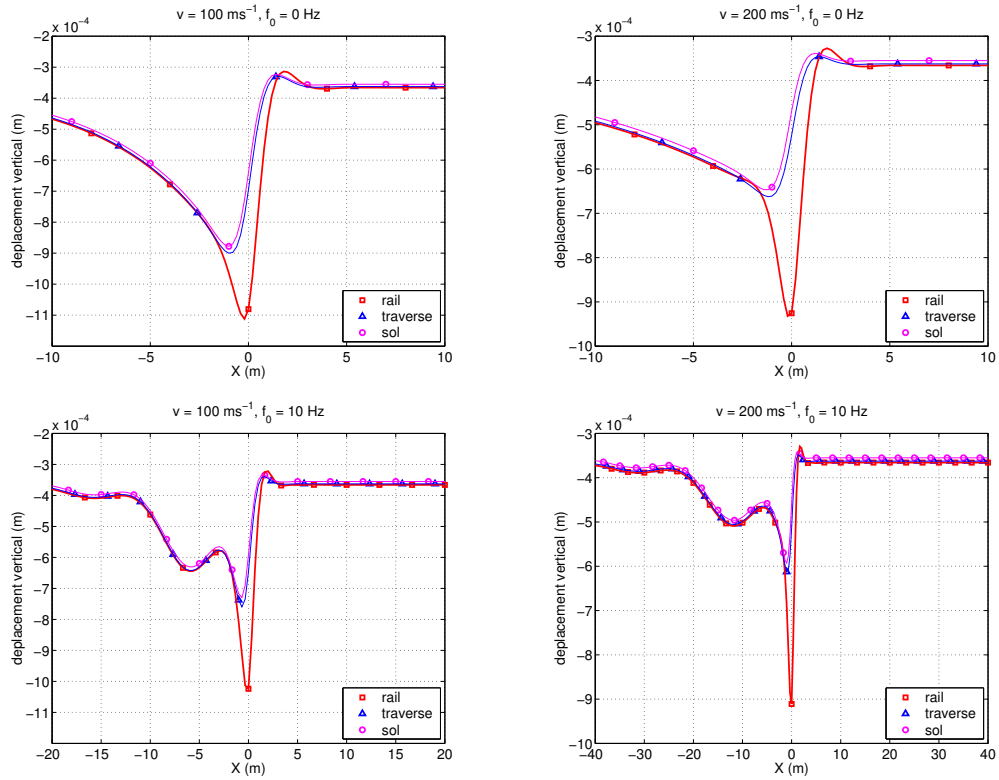
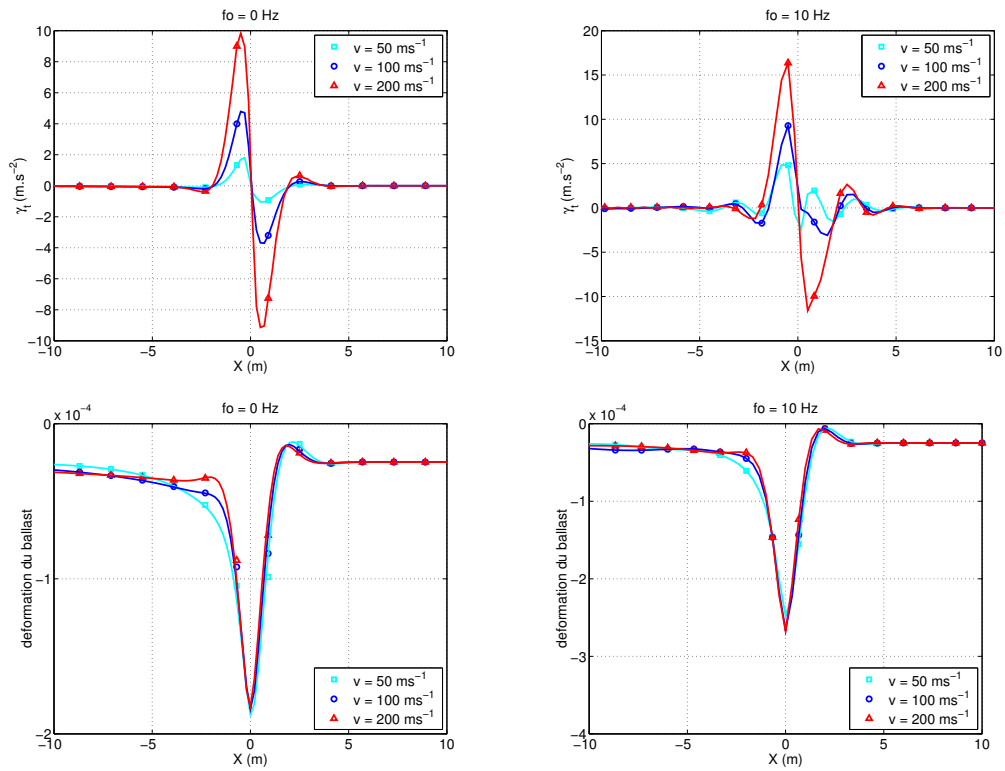


FIGURE 5.12. Influence de la vitesse et de la fréquence

FIGURE 5.13. Accélération $\gamma_t = \ddot{w}_t$ et déformation du ballast $(w_t - w_s)/h_b$

On évalue à chaque pas de temps deux fonctions γ_t et $(w_t - w_s)/h_b$ ($h_b = 30\text{ cm}$ est la hauteur de la couche de ballast) pour chercher l'instant où elles ont des valeurs maximales. Dans la figure 5.13, les courbes de ces 2 fonctions à cet instant sont tracées. Dans le cas d'une charge constante, la valeur maximale de vitesse de la charge pour le critère $\ddot{w}_t < g$ vaut environ 200 m.s^{-1} . En revanche, cette valeur devient inférieure à 100 m.s^{-1} quand la charge est harmonique.

Les courbes de $(w_t - w_s)/h_b$ dans la figure 5.13 montrent que la couche de ballast reste toujours en compression. La non-linéarité n'apparaît pas dans ce problème.

Influence de la rigidité du ballast. On peut rencontrer dans la réalité une situation où la couche de ballast est assez souple à cause d'un mauvais bourrage. On calcule ici avec une rigidité k_b de $4 \times 10^7\text{ Nm}^{-1}$ (qui représente un module de ballast de 50 MPa , soit 4 fois plus souple que celui du calcul précédent). Les déplacements statiques dans ce cas sont : $w_r = 0.388\text{ mm}$, $w_t = 0.385\text{ mm}$ et $w_s = 0.355\text{ mm}$.

Les résultats numériques sont présentés dans la figure 5.14. Les déplacements verticaux sont évidemment plus grands mais l'influence de la fréquence est moins importante que dans le cas précédent.

La vitesse maximale pour que $\gamma_t < g$ est de $\approx 100\text{ m.s}^{-1}$ quand la charge est constante et est de $\approx 50\text{ m.s}^{-1}$ quand la charge est harmonique (figure 5.15). Ces valeurs sont seulement les moitiés de celles du cas d'un ballast rigide. Quand la charge est harmonique, la valeur maximale de l'accélération verticale peut augmenter jusqu'à 40 m.s^{-2} avec $v = 200\text{ m.s}^{-1}$.

La couche de ballast est toujours en compression.

Effet de la rigidité du sol. On prend dans cet exemple un sol qui est plus souple et dont la rigidité $k_s = 2 \times 10^7\text{ Nm}^{-1}$. La rigidité du ballast est toujours $k_b = 1.6 \times 10^9\text{ Nm}^{-1}$. Les déplacements sont évidemment plus importants. Par contre, les accélérations (figure 5.17) sont moins importantes que celles dans le cas où le sol est plus rigide (figure 5.13).

Effet de deux charges. On considère dans ce calcul le problème de deux charges qui représentent deux essieux dont la distance entre eux est de 3 m . On utilise donc deux forces identiques qui s'appliquent aux points $X = -1.5\text{ m}$ et $X = 1.5\text{ m}$. Les mêmes calculs sont réalisés (avec le ballast rigide).

Les déplacements verticaux maximums (figure 5.18) dus à deux forces ne changent pas vis à vis de ceux dus à une seule force. La même remarque s'applique pour l'accélération.

La figure 5.20 présente la force au niveau du haut de la couche de ballast pour avoir une idée de la surcharge dynamique à cause de la vitesse et de la fréquence.

REMARQUE 5.4.1

En regardant les exemples présentés, on peut faire les remarques suivantes sur les résultats :

- Le déplacement est plus important avec une structure plus souple.
- Les accélérations verticales en haut de la couche ballast sont plus importantes si le ballast est plus souple. En revanche, elles ne sont pas beaucoup influencées par un sol plus souple.

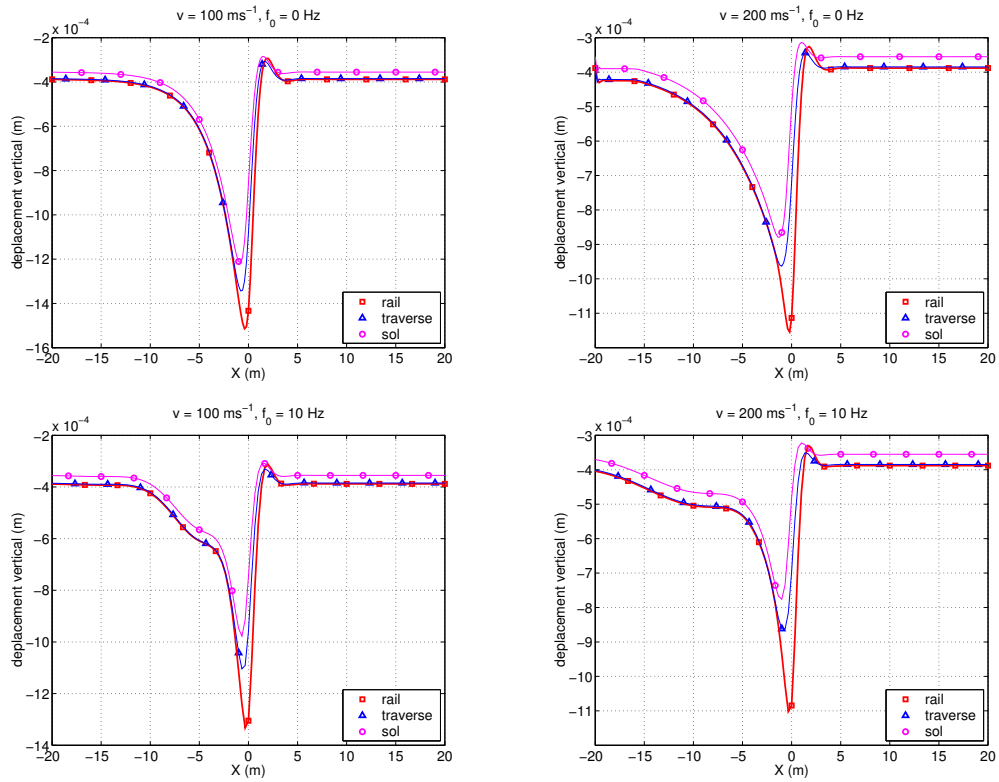
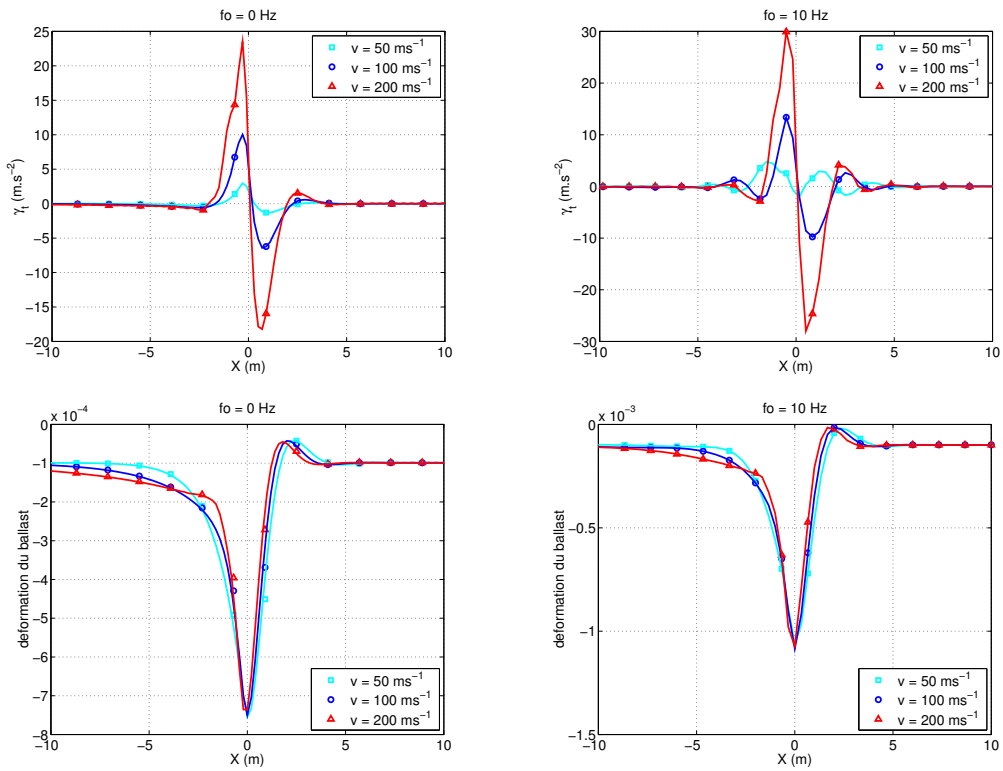


FIGURE 5.14. Influence de la vitesse et de la fréquence - ballast souple

FIGURE 5.15. Accélération $\gamma_t = \ddot{w}_t$ et déformation du ballast $(w_t - w_s)/h_b$ - ballast souple

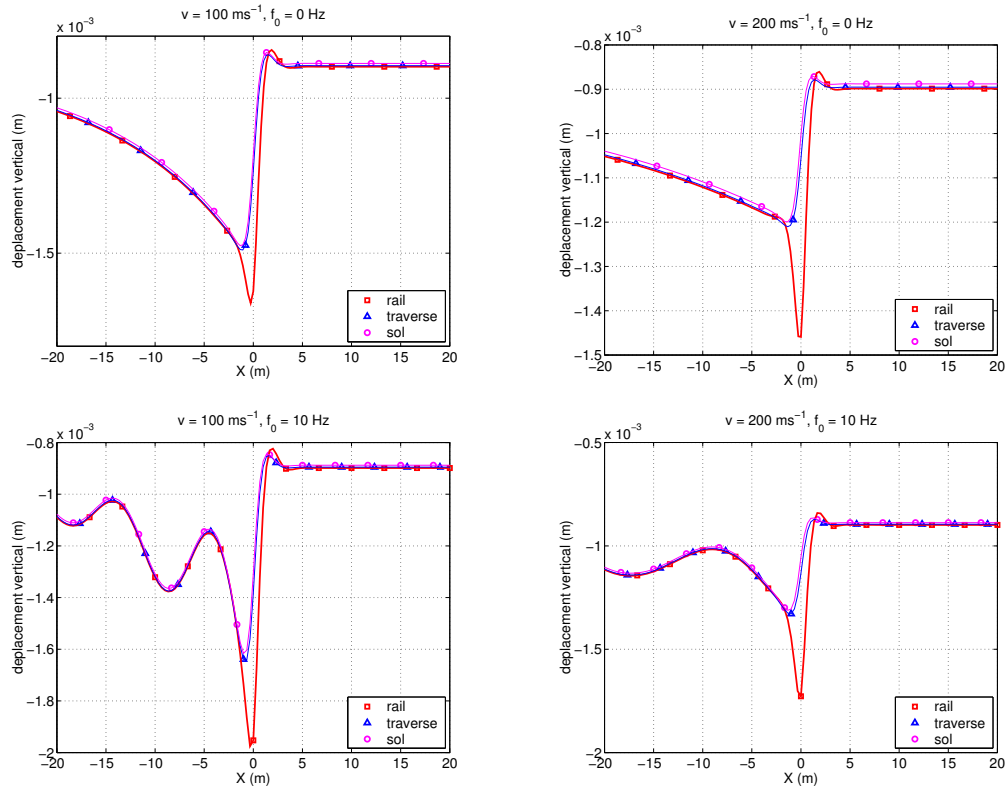
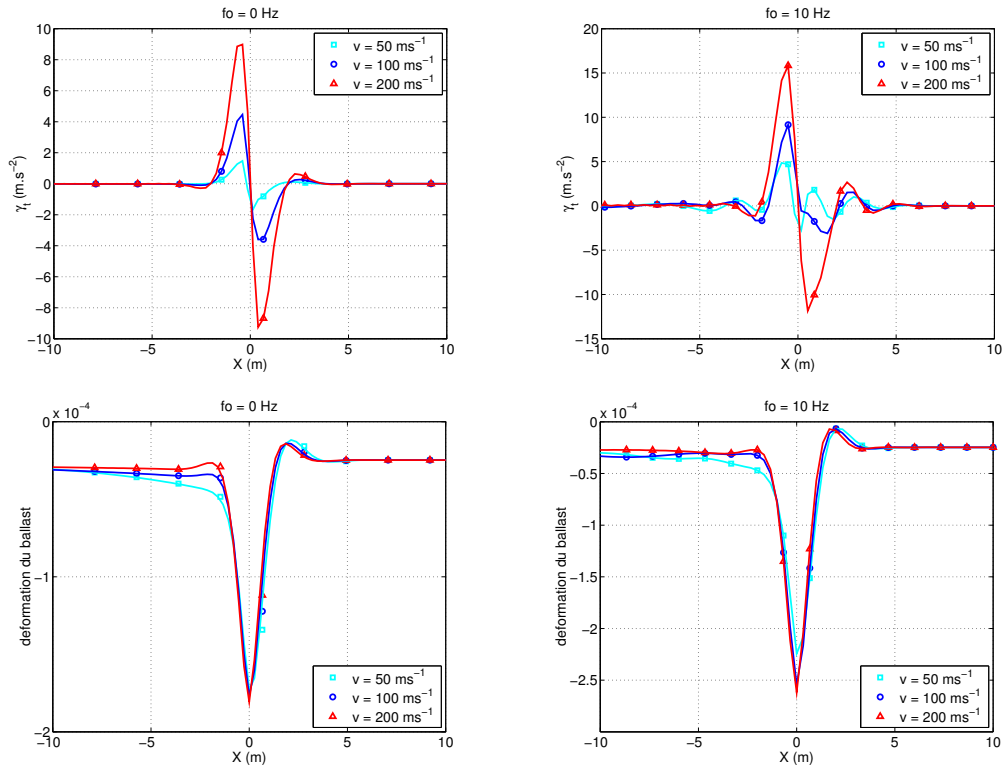


FIGURE 5.16. Influence de la vitesse et de la fréquence - sol souple

FIGURE 5.17. Accélération $\gamma_t = \ddot{w}_t$ et déformation du ballast $(w_t - w_s)/h_b$ - sol souple

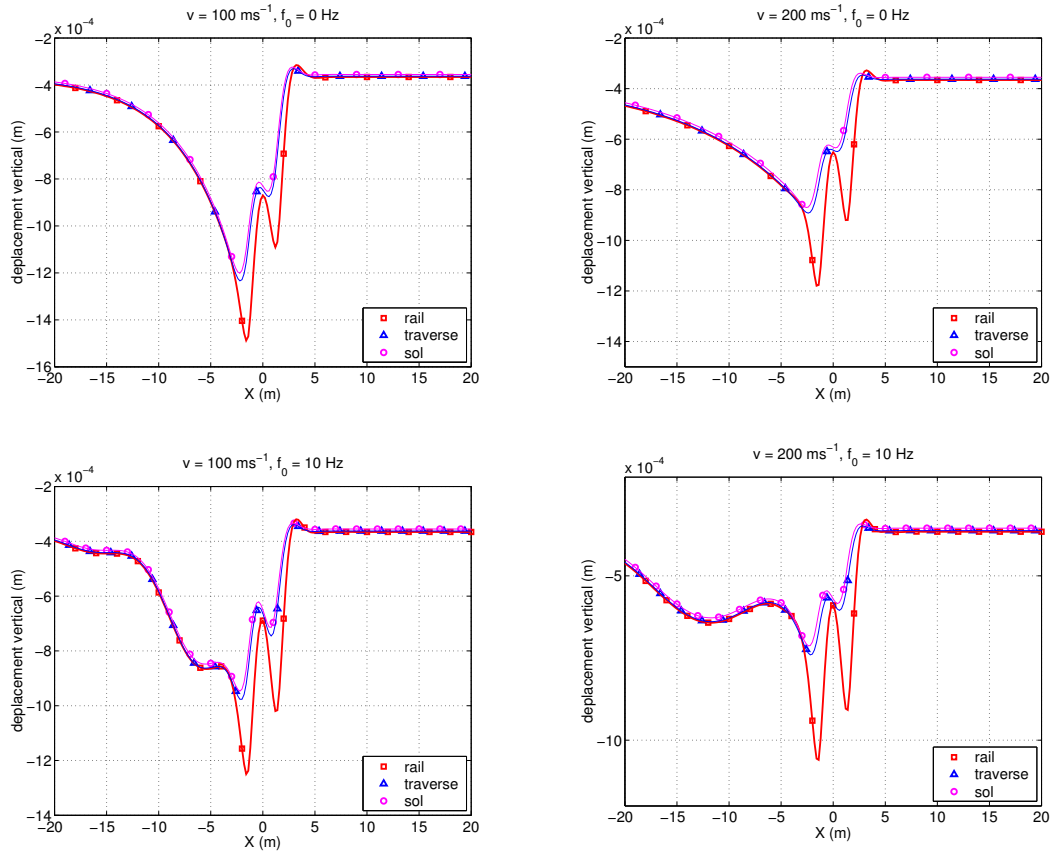
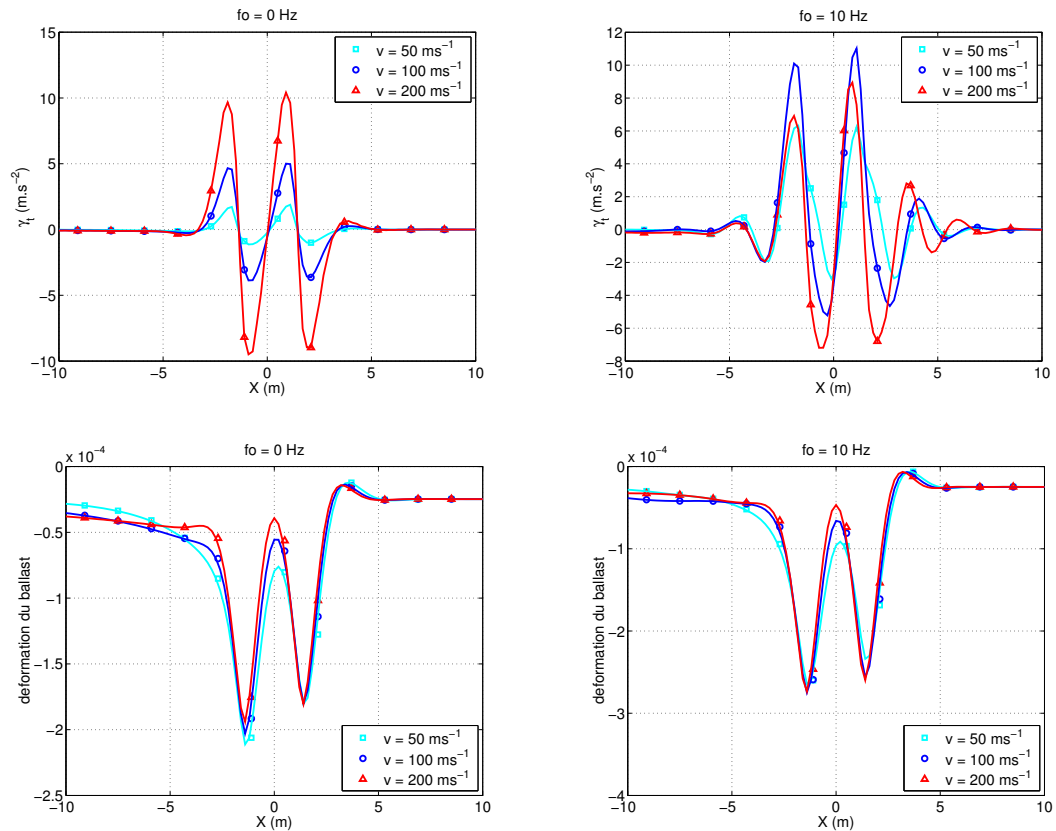


FIGURE 5.18. Influence de la vitesse et de la fréquence : cas de deux essieux

FIGURE 5.19. Accélération $\gamma_t = \ddot{w}_t$ et déformation du ballast $(w_t - w_s)/h_b$: cas de deux essieux

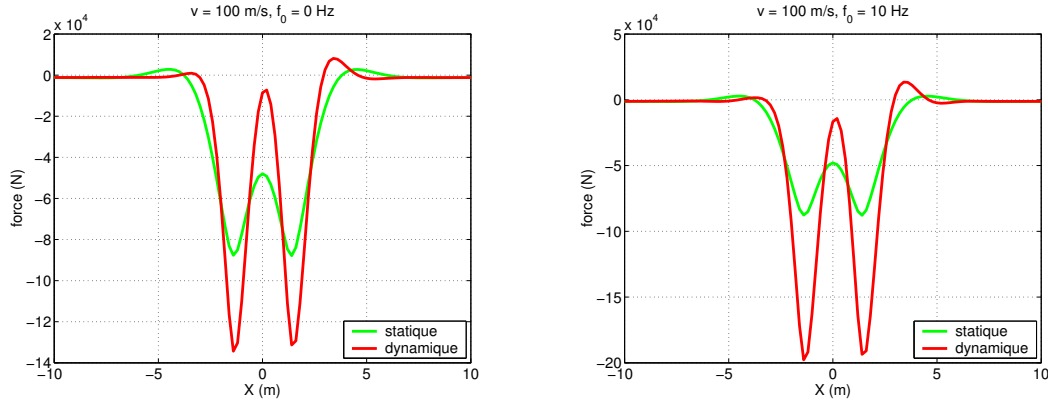


FIGURE 5.20. Force appliquée sur le ballast

5.5 Problème d'appuis discrets

5.5.1 Modèle

On va considérer dans cette partie le cas où le système de ressorts n'est plus uniforme mais périodique pour représenter les traverses des voies ferrées. On va utiliser un modèle de calcul présenté dans la figure 5.21 où la poutre est supportée par des morceaux des ressorts uniformes de largeur 30 cm qui sont mis chaque 60 cm ¹. En conséquence, la rigidité et l'amortissement des ressorts sont pris égaux à $2k$ et 2η , respectivement.

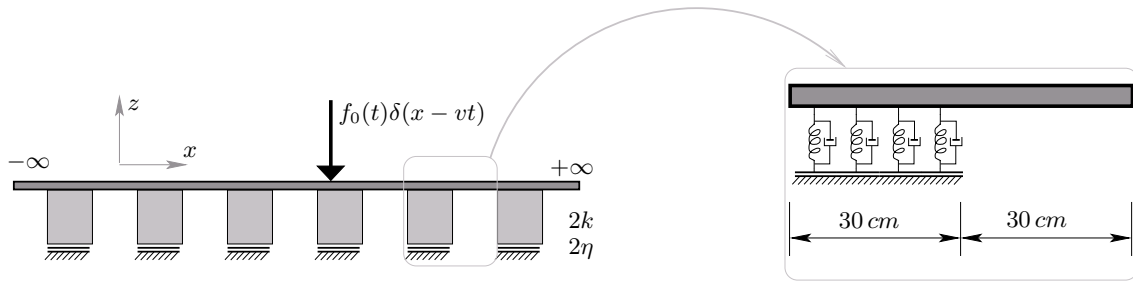


FIGURE 5.21. Modèle discret

Un calcul transitoire dans le repère fixe doit être envisagé pour traiter ce problème. Le problème peut être résolu par une même procédure que celle présentée dans le cas uniaxial (section 3.3).

5.5.2 Effet des appuis discrets par rapport au problème continu.

On cherche s'il y a des différences de réponse dynamique dans la structure avec les modèles continus et discrets. Dans les calculs en dessous, on utilise un maillage de 800 éléments identiques dans un domaine dont la taille de chaque élément vaut $h = 7.5\text{ cm}$. Le pas de temps de calcul est pris égal à $\Delta t = h/v$ où v est la vitesse de la charge.

Deux cas de rigidité de la fondation sont considérés. Le premier calcul est avec les données du tableau 4.1 dont la rigidité de la fondation k vaut $1.6 \times 10^7\text{ N/m}$. Dans le deuxième cas, on

¹Dans la réalité, les largeurs des traverses sont de 29 cm et la distance entre elles est de 60 cm

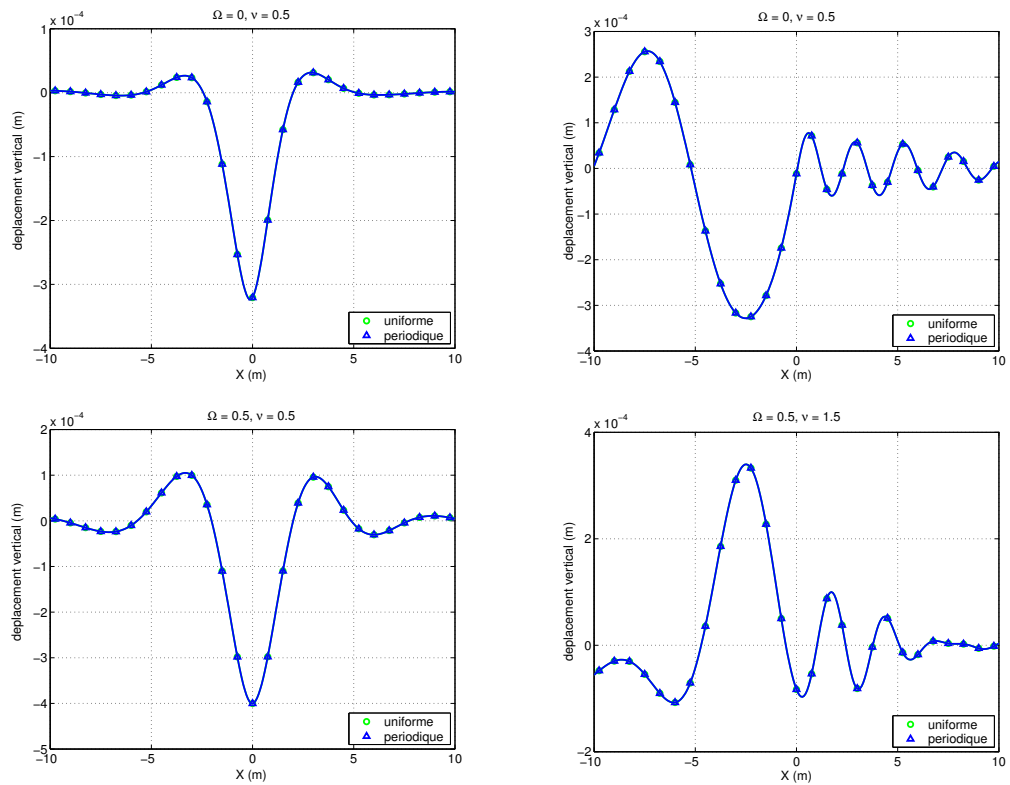


FIGURE 5.22. Comparaison des déplacements verticaux avec les appuis uniformes et discrets : cas d'une fondation souple

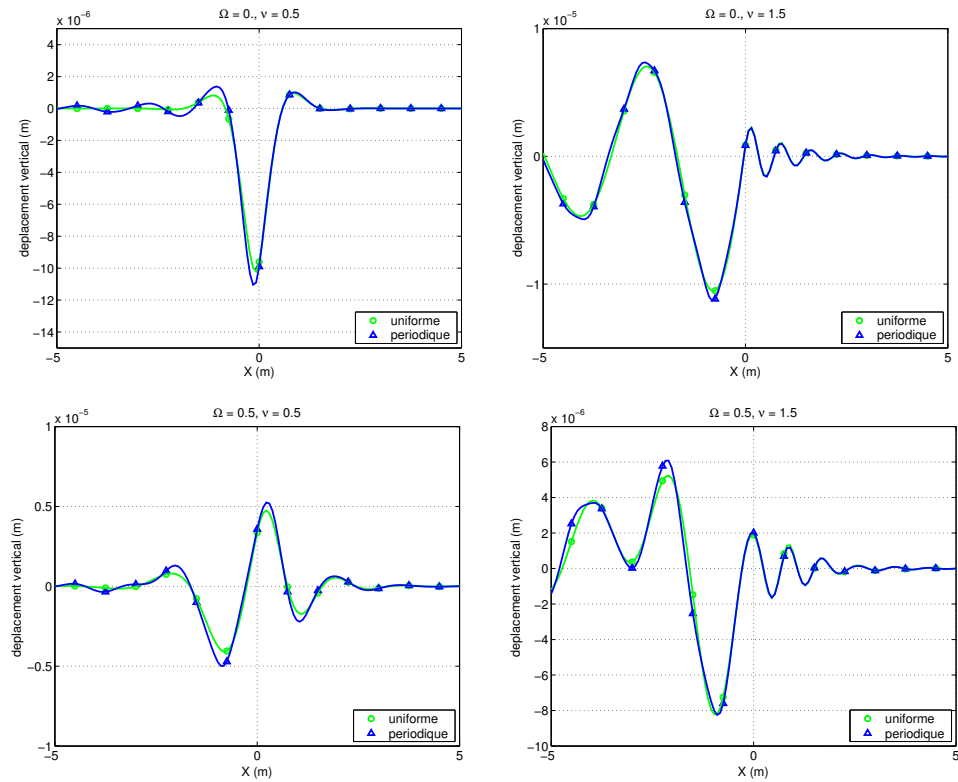


FIGURE 5.23. Comparaison des déplacements verticaux avec les appuis uniformes et discrets : cas d'une fondation rigide

calcule avec une rigidité k 100 fois plus grande, i.e. $k = 1.6 \times 10^9 \text{ N/m}$. La structure est calculée en subsonique et en supersonique, avec une amplitude de charge soit constante soit harmonique.

On peut constater en regardant la figure 5.22 que, dans le cas où la fondation est souple, la solution obtenue est la même avec un modèle d'appuis continus ou avec un modèle d'appuis discrets. En revanche, les différences deviennent visibles quand la rigidité des appuis est importante. En effet, quand la fondation est souple, la déflexion locale de la poutre entre deux appuis est très petite par rapport à la déflexion globale. Ce rapport augmente en fonction de la rigidité des appuis.

5.6 Conclusion

Les études sur le modèle unidimensionnel des voies ferrées sont effectuées avec deux modèles : P1R et P3R. A partir de ces résultats, on peut déduire les conclusions suivantes :

- La vitesse critique a un rôle très important. Dès que la vitesse de la charge dépasse la vitesse critique, la nature de la solution change complètement. Dans le cas non-linéaire, la valeur de la vitesse critique dépend aussi de l'amplitude de la charge.
- Les déplacements sont moins importants dans le cas où le ballast et le sol sont plus rigides.
- La rigidité faible de la couche de ballast peut créer des accélérations verticales importantes.
- On n'a pas trouvé de problème où il existe des ondes de choc comme dans le cas uniaxial (on note aussi que la non-linéarité cette fois-ci est introduite dans les ressorts, pas dans la structure comme pour le cas uniaxial).
- Comme la distance entre les blochets n'est pas grande par rapport à leur taille, l'effet de périodicité des appuis discrets n'est pas très important dans les calculs réalisés.

Troisième partie

Modèle tridimensionnel non-linéaire

Chapitre 6

Modélisation du comportement 3D du ballast

6.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire un modèle de comportement macroscopique continu du matériau ballast [86]. Ce chapitre est constitué de 3 parties. Dans la première partie, on va proposer une modification de la loi de comportement pour tenir compte du mécanisme de *non-résistance en tension* du ballast. La procédure de calcul numérique pour cette loi de comportement modifiée est ensuite proposée. Dans la deuxième partie, on va présenter des essais quasi-statiques cycliques en 1D sur des échantillons de ballast mis dans un tube. Ceux-ci permettent de déterminer le comportement du ballast dans la partie *en compression*. A la fin, quelques validations numériques seront présentées.

6.2 Modèle non-tension des matériaux granulaires

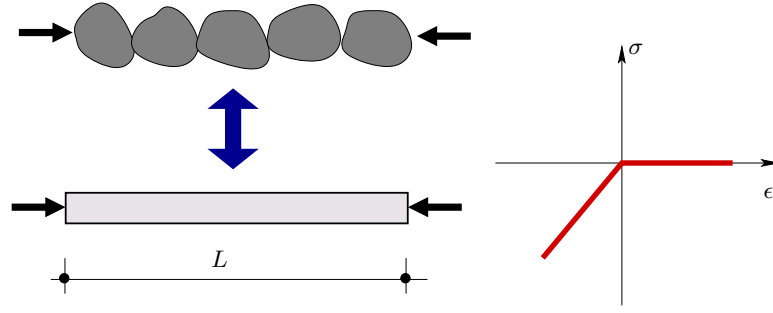
6.2.1 Motivation

On s'intéresse à une loi de comportement macroscopique des matériaux granulaires qui adapte l'effet *non-tension* pour ce type de matériau. Considérons d'abord le cas unidimensionnel où il y a un déplacement imposé (δL) sur une chaîne de grains de longueur L (Figure 6.1). On définit la déformation par $\epsilon = \frac{\delta L}{L}$ et la contrainte σ par la valeur moyenne des forces de contact entre les grains. Cette chaîne de grains vérifie une loi de comportement du type unilatérale suivante :

$$\begin{aligned}\sigma &= k\epsilon \quad \text{si} \quad \epsilon < 0 \\ \sigma &= 0 \quad \text{si} \quad \epsilon \geq 0\end{aligned}$$

où k est la rigidité moyenne de contact des grains. La figure 6.1 présente une courbe de comportement unilatéral dans le cas où k est linéaire. Cette courbe montre le caractère de non rigidité en tension des matériaux granulaires.

On intègre cette propriété dans le cas plus général du milieu granulaire en 3D. A partir du fait qu'il n'y pas de résistance entre deux grains en traction, autrement dit, qu'on ne peut pas appliquer une contrainte positive sur les matériaux granulaires, on propose un modèle de comportement macroscopique que l'on appelle *modèle non-tension*. Dans ce modèle, la loi de comportement doit être introduite telle que la contrainte normale sur n'importe quelle section dans le domaine considéré ne soit jamais positive ($\sigma_{ij}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j \leq 0$ où σ et \mathbf{n} sont le tenseur des contraintes et le vecteur unité normal de la section considérée).

FIGURE 6.1. *Loi de comportement 1D des matériaux granulaires*

Dans la littérature, le modèle non-tension a été proposé depuis quelques années, surtout dans les travaux sur la modélisation des structures *masonry-like*. Pazenca, Polizzotto [91] et Del Piero [29] ont discuté de la loi de comportement et aussi de la compatibilité de la charge extérieure pour ce modèle où la déformation est décomposée en deux parties : l'une élastique et l'autre anélastique. Les hypothèses fondamentales de non-résistance en tension et d'existence de la densité d'énergie élastique demandent que le tenseur des contraintes soit défini négatif et que la contrainte et la déformation anélastique soient orthogonales. L'hypothèse de petite déformation est toujours utilisée. Suite à cette base théorique, les aspects numériques sont aussi étudiés dans le développement d'une formulation variationnelle et dans la mise en oeuvre dans la méthode des éléments finis [5][26][77].

La loi de comportement du modèle non-tension des matériaux granulaires proposée ici est dérivée directement de la densité d'énergie de déformation qui s'exprime en fonction des déformations principales. Cette fonction s'annule en fonction du signe des déformations principales et aussi de la dilatation volumique. Le problème est traité comme dans le cas des matériaux hyperélastiques. La loi de comportement s'écrit dans la base principale des tenseurs des déformations à l'aide de la décomposition spectrale et ensuite est intégrée dans la procédure de la méthode des éléments finis non-linéaires.

Dans les calculs suivants, on appelle S_3 l'espace des tenseurs du 2^e ordre de dimension 3. Les notations S_3^+ , S_3^- indiquent l'espace des tenseurs définis positifs ou négatifs dans S_3 .

6.2.2 Loi de comportement non-tension des matériaux granulaires

A. Hypothèses

- (i) Soit V un volume unité dans une structure de matériaux granulaires. En supposant que le nombre de grains dans V est suffisamment grand tel que les torsions locales peuvent être négligées, la direction des forces de contact se distribue de façon isotrope. Le domaine peut être considéré comme un milieu *isotrope* et *homogène*.
- (ii) La déformation est infinitésimale.
- (iii) Le tenseur des contraintes est toujours défini négatif.

B. Fonction d'énergie de déformation

Pour décrire le comportement de matériaux élastiques normaux, il suffit d'introduire une fonction d'énergie des déformations qui est une forme quadratique positive convexe de la déformation $W(\epsilon) : S_3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ et s'exprime par :

$$W(\epsilon) = \mathbb{C}(\epsilon) : \epsilon : \epsilon \quad (6.1)$$

où \mathbb{C} est un tenseur du 4^e ordre, dont les composantes sont les coefficients élastiques et $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon} \in S_3$ sont les tenseurs des contraintes et des déformations. Par définition, le tenseur des contraintes est obtenu à partir de la dérivée de l'énergie W :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.2)$$

Comme $\boldsymbol{\sigma}$ doit être toujours défini négatif, il est préférable d'écrire \mathcal{W} en fonction des valeurs principales de déformation. Pour s'adapter aux matériaux granulaires, on suppose qu'il existe une énergie non nulle dans une direction \mathbf{n} si soit la déformation dans cette direction ($\epsilon_{ij}\mathbf{n}_i\mathbf{n}_j$) soit la dilatation volumique est négative. On propose alors une fonction \hat{W} qui a la même forme que dans le cas élastique classique :

$$\hat{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2}\lambda[(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^-]^2 + \sum_{a=1}^3 \mu [\epsilon_a^-]^2 \quad (6.3)$$

où $\epsilon_a (a = 1, 2, 3)$ sont les déformations principales; λ et μ sont deux paramètres élastiques. La notation $(.)^-$ représente la partie négative de $(.)$ qui est définie de la façon suivante :

$$\alpha^- = \frac{1}{2}(\alpha - |\alpha|) \quad (6.4)$$

Dans le cadre de ce chapitre, on considère deux cas différents qui dépendent des hypothèses utilisées pour λ et μ :

- *Elasticité linéaire.* λ et μ sont deux coefficients constants (deux coefficients élastiques de Lamé).
- *Elasticité non-linéaire.* λ est une fonction de $\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}$: $\lambda = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})$ et μ est une fonction qui est définie telle que : $\mu [\epsilon_a^-]^2 = \mu(\epsilon_a) [\epsilon_a^-]^2$.

On va dans la suite exprimer les dérivées de W dans ces deux cas linéaire et non-linéaire. Ces dérivées vont servir aux calculs suivants.

Cas de l'élasticité linéaire unilatérale

En utilisant les deux propriétés suivantes de la partie négative :

$$\frac{\partial \alpha^-}{\partial \alpha} = H(-\alpha) \quad ; \quad \alpha^- \frac{\partial \alpha^-}{\partial \alpha} = \alpha^- \quad (6.5)$$

où $H(\alpha)$ est la fonction de Heaviside qui est définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

on peut déduire les dérivées de la densité d'énergie W

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \epsilon_a} &= \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})^- + 2\mu\epsilon_a^- \\ \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \epsilon_a \partial \epsilon_b} &= \lambda H(-\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu H(-\epsilon_a)\delta_{ab} \end{aligned} \quad (6.7)$$

où δ_{ab} est le delta de Kröneckner.

Cas de l'élasticité non-linéaire unilatérale

Comme λ et μ_a dépendent respectivement de $\text{tr}\epsilon$ et de ϵ_a , on peut montrer que les dérivées de \hat{W} sont déterminées par les formules similaires aux cas linéaires :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \epsilon_a} &= \tilde{\lambda}_1 (\text{tr}\epsilon)^- + 2\tilde{\mu}_{1a} \epsilon_a^- \\ \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \epsilon_a \partial \epsilon_b} &= \tilde{\lambda}_2 H(-\text{tr}\epsilon) + 2\tilde{\mu}_{2a} H(-\epsilon_a) \delta_{ab}\end{aligned}} \quad (6.8)$$

avec :

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda + \frac{1}{2} \lambda' \text{tr}\epsilon \quad (6.9)$$

$$\tilde{\mu}_{1a} = \mu_a + \frac{1}{2} \mu'_a \epsilon_a \quad (6.10)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda + 2\lambda'(\text{tr}\epsilon) + \frac{1}{2} \lambda''(\text{tr}\epsilon)^2 \quad (6.11)$$

$$\tilde{\mu}_{2a} = \mu_a + 2\mu'_a \epsilon_a + \frac{1}{2} \mu''_a \epsilon_a^2 \quad (6.12)$$

où on note : $\mu_a = \mu(\epsilon_a)$.

Démonstration.

En utilisant (6.5) et notant que $\alpha\alpha^- = \alpha^-\alpha^-$, la dérivée de la fonction de densité d'énergie \hat{W} (6.3) peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \epsilon_a} &= \lambda (\text{tr}\epsilon)^- \frac{\partial (\text{tr}\epsilon)^-}{\partial (\text{tr}\epsilon)} \frac{\partial (\text{tr}\epsilon)}{\partial \epsilon_a} + \frac{1}{2} \lambda' (\text{tr}\epsilon)^{-2} + 2\mu_a \epsilon_a^- \frac{\partial \epsilon_a^-}{\partial \epsilon_a} + \mu'_a \epsilon_a^{-2} \\ &= [\lambda + \frac{1}{2} \lambda' \text{tr}\epsilon^-] \text{tr}\epsilon^- + 2[\mu_a + \frac{1}{2} \mu'_a \epsilon_a^-] \epsilon_a^- \\ &= [\lambda + \frac{1}{2} \lambda' \text{tr}\epsilon] \text{tr}\epsilon^- + 2[\mu_a + \frac{1}{2} \mu'_a \epsilon_a] \epsilon_a^- \quad (6.13)\end{aligned}$$

La dérivée du deuxième ordre est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \epsilon_b} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \epsilon_a} &= [\lambda + \frac{1}{2} \lambda' \text{tr}\epsilon] \frac{\partial \text{tr}\epsilon^-}{\partial \text{tr}\epsilon} \frac{\partial \text{tr}\epsilon}{\partial \epsilon_b} + [\lambda' + \frac{1}{2} \lambda' + \frac{1}{2} \lambda'' \text{tr}\epsilon] \text{tr}\epsilon^- \\ &\quad + 2[\mu_a + \frac{1}{2} \mu'_a \epsilon_a] \frac{\partial \epsilon_a^-}{\partial \epsilon_a} \frac{\partial \epsilon_a}{\partial \epsilon_b} + 2[\mu'_a + \frac{1}{2} \mu'_a + \frac{1}{2} \mu''_a \epsilon_a] \epsilon_a^- \quad (6.14)\end{aligned}$$

notons que $\alpha^- = \alpha H(-\alpha)$, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \epsilon_a \partial \epsilon_b} = [\lambda + 2\lambda'(\text{tr}\epsilon) + \frac{1}{2} \lambda''(\text{tr}\epsilon)^2] H(-\text{tr}\epsilon) + 2[\mu_a + 2\mu'_a \epsilon_a + \frac{1}{2} \mu''_a \epsilon_a^2] H(-\epsilon_a) \delta_{ab} \quad (6.15)$$

□

REMARQUE 6.2.1

1. La fonction de densité d'énergie proposée pour le cas non-linéaire assure toujours l'isotropie du comportement du matériau. Cela peut être démontré en vérifiant la condition pour qu'une fonction soit isotropique qui demande qu'on ait $\forall \mathbf{Q}$ orthogonal direct ¹ :

$$W(\epsilon) = W(\mathbf{Q}\epsilon\mathbf{Q}^t) \quad (6.16)$$

¹Un tenseur \mathbf{Q} est appelé orthogonal direct s'il vérifie : $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{1}$ et $\det(\mathbf{Q}) = 1$

2. Dans le domaine des petites déformations, on peut écrire les deux coefficients d'élasticité λ et μ_i comme des polynômes en fonction de $\text{tr}\epsilon$ et ϵ_i . En fait, les données expérimentales nous donnent toujours la relation de contrainte-déformation, c'est à dire les fonctions $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\mu}_{1a}$. Supposons que $\tilde{\lambda}_1$ soit un polynôme du 4^e ordre en $\text{tr}\epsilon$:

$$\tilde{\lambda}_1 = a(\text{tr}\epsilon)^4 + b(\text{tr}\epsilon)^3 + c(\text{tr}\epsilon)^2 + d(\text{tr}\epsilon) + e \quad (6.17)$$

on peut déduire facilement la fonction λ à partir de (6.9) :

$$\lambda = \frac{1}{3}a(\text{tr}\epsilon)^4 + \frac{2}{5}b(\text{tr}\epsilon)^3 + \frac{1}{2}c(\text{tr}\epsilon)^2 + \frac{2}{3}d(\text{tr}\epsilon) + e \quad (6.18)$$

et en appliquant cette fonction dans (6.11), la fonction $\tilde{\lambda}_2$ s'exprime par :

$$\tilde{\lambda}_2 = 5a(\text{tr}\epsilon)^4 + 4b(\text{tr}\epsilon)^3 + 3c(\text{tr}\epsilon)^2 + 2d(\text{tr}\epsilon) + e \quad (6.19)$$

Les mêmes coefficients sont appliqués pour μ_i .

6.3 Méthode de résolution numérique

6.3.1 Rappel de la méthode des éléments finis pour le problème élastique non-linéaire

La loi de comportement des matériaux granulaires a été décrite comme un matériau non-linéaire élastique. On va présenter la procédure numérique générale de la méthode des éléments finis dans laquelle on peut intégrer la loi de comportement proposée dans les calculs de structures comportant des matériaux granulaires.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine continu dont la frontière $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$. Les conditions aux limites sont les forces appliquées sur Γ_f et le déplacement nul imposé sur Γ_u qui s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_f \subset \Gamma \quad (6.20)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \subset \Gamma \quad (6.21)$$

Appelons $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ le vecteur déplacement en un point $\mathbf{x} \in \Omega$. Le Principe des Travaux Virtuels (PTV) sur une perturbation virtuelle $\delta\mathbf{u}$ statique s'écrit :

$$G(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})^T \delta\epsilon \, d\Omega - \int_{\mathbf{x} \in \Gamma_f} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^t \delta\mathbf{u} \, d\Gamma = 0$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega; \forall \delta\mathbf{u} \in C^{ad} \quad (6.22)$$

où C^{ad} est l'espace admissible du déplacement virtuel. Dans cette équation, on a écrit les tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des déformations ϵ sous la forme de vecteurs pour simplifier les calculs dans la suite.

En utilisant la discrétisation de la méthode des éléments finis, le travail virtuel peut se réécrire en fonction du vecteur des déplacements aux noeuds \mathbf{U} :

$$G(\mathbf{U}, \delta\mathbf{U}) = \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{U}) \quad (6.23)$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ est appelé le vecteur résidu. Le PTV impose $\mathbf{R}(\mathbf{U}) = 0$ et il faut résoudre cette équation pour trouver la solution \mathbf{U} . Les algorithmes itératifs sont utilisés afin de trouver la solution \mathbf{U} dans le cas non-linéaire. On utilise ici la méthode de Newton - Raphson qui est basée sur le développement de Taylor au 1^e ordre de $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ à partir d'une solution actuelle $\mathbf{U}^{(k)}$.

$$\mathbf{R}^{(k+1)} \approx \mathbf{R}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^{(k)}} \Delta\mathbf{U}^{k+1} = 0 \quad (6.24)$$

Cette équation donne la solution de l'incrément $\Delta \mathbf{U}^{k+1}$:

$$\Delta \mathbf{U}^{(k+1)} = -\mathbf{K}_T^{(k)-1} \mathbf{R}^{(k)} \quad (6.25)$$

où le résidu $\mathbf{R}(\mathbf{U})^{(k)}$ est déterminé en fonction des déplacements à l'incrément précédent $\mathbf{U}^{(k)}$:

$$\mathbf{R}^{(k)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^{(k)} d\Omega - \mathbf{F}^{(k)} \quad (6.26)$$

on rappelle que la fonction d'interpolation nous permet de calculer la déformation à partir des déplacements aux noeuds $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}$. En supposant que la force extérieure ne dépend pas du déplacement, la matrice de rigidité tangente $\mathbf{K}_T^{(k)}$ est déterminée par :

$$\mathbf{K}_T^{(k)} = \frac{\partial \mathbf{R}^{(k)}}{\partial \mathbf{U}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)^{(k)} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{U}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.27)$$

et $\mathbf{D}^{(k)} = \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ définit le module tangent du matériau. $\mathbf{D}^{(k)}$ est la présentation matricielle du tenseur tangent du 4^e ordre qui est défini par $\partial_{\boldsymbol{\epsilon}}^2 \dot{W}$.

Les deux termes à la droite de l'équation (6.25) sont déterminés explicitement en fonction de $\mathbf{U}^{(k)}$. On peut alors calculer l'incrément $\Delta \mathbf{U}^{(k+1)}$ à partir de l'inverse de $\mathbf{K}_T^{(k)}$ et puis calculer le vecteur des déplacements à l'itération $(k+1)$:

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + \Delta \mathbf{U}^{(k+1)} \quad (6.28)$$

La solution finale du déplacement est calculée de façon itérative jusqu'à la convergence qui est vérifiée par la condition :

$$\frac{|\Delta \mathbf{U}^{(k+1)}|}{|\mathbf{U}^{(k+1)}|} < \delta \quad (6.29)$$

où δ est la tolérance.

On a présenté ci-dessus la méthode générale des éléments finis pour résoudre le problème élastique non-linéaire. Le problème restant à résoudre est comment calculer le résidu et le module tangent avec le comportement non-tension à chaque itération (k) (c'est à dire comment calculer $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbb{C}). La partie suivante présente une méthode de décomposition spectrale qui permet d'explicitier $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbb{C} à partir d'un tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ donné.

6.3.2 Équations élastiques dans la base principale des déformations

A. Notion sur la représentation spectrale d'un tenseur

Soit un tenseur $\boldsymbol{\epsilon} \in S_3$. La représentation spectrale d'un tenseur symétrique $\boldsymbol{\epsilon}$ s'écrit par :

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{a=1}^3 \epsilon_a \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} \quad \|\mathbf{n}^{(a)}\| = 1} \quad (6.30)$$

où $\mathbf{n}^{(a)}$ ($a = 1, 2, 3$) sont les vecteurs principaux de $\boldsymbol{\epsilon}$ et ϵ_a sont les valeurs principales associées ². Ces valeurs principales sont en fait les racines du polynôme caractéristique :

$$p(\epsilon_a) = -\epsilon_a^3 + I_1 \epsilon_a^2 - I_2 \epsilon_a + I_3 = 0 \quad (a = 1, 2, 3) \quad (6.31)$$

² $\mathbf{n}^{(a)}$ et ϵ_a sont respectivement le (a) ème vecteur propre et la valeur propre associée du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$

où les coefficients I_1, I_2, I_3 sont appelés les invariants du tenseur ϵ et sont définis par :

$$I_1 = \epsilon : \mathbf{1} \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\epsilon : \mathbf{1})^2 - \epsilon^2 : \mathbf{1}] \quad ; \quad I_3 = \det[\epsilon] \quad (6.32)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur identité du 2^e ordre. Si on appelle $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les trois valeurs principales de ϵ , I_1, I_2, I_3 s'expriment par :

$$I_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (6.33)$$

$$I_2 = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1 \quad (6.34)$$

$$I_3 = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \quad (6.35)$$

Les vecteurs $\{\mathbf{n}^{(a)}, a = 1, 2, 3\}$ forment une base orthonormée et vérifient les quelques propriétés utiles suivantes :

$$(i) \quad \sum_{a=1}^3 \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} = \mathbf{1} \quad (6.36)$$

$$(ii) \quad \mathbf{n}^{(a)} \cdot \mathbf{n}^{(b)} = \delta_{ab} \quad (6.37)$$

REMARQUE 6.3.1

Soient $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ les valeurs principales du tenseur ϵ . Notons $\{a, b, c\}$ une permutation de $\{1, 2, 3\}$, on distingue les 3 cas suivants :

- (i) $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq \epsilon_c$: Les vecteurs principaux sont indépendants et la base orthogonale $\{\mathbf{n}^{(a)}, \mathbf{n}^{(b)}, \mathbf{n}^{(c)}\}$ est spécifiée dans \mathbb{R}^3 en fonction des valeurs de $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ (figure 6.2a).
- (ii) $\epsilon_a = \epsilon_b \neq \epsilon_c$: $\mathbf{n}^{(a)}$ et $\mathbf{n}^{(b)}$ sont dépendants et en utilisant (6.36) dans (6.30), le tenseur ϵ peut s'écrire dans ce cas :

$$\epsilon = \epsilon_a (\mathbf{1} - \mathbf{n}^{(c)} \otimes \mathbf{n}^{(c)}) + \epsilon_c \mathbf{n}^{(c)} \otimes \mathbf{n}^{(c)} \quad (6.38)$$

Le seul vecteur qui est spécifié est $\mathbf{n}^{(c)}$. Les deux restants peuvent tourner librement dans le plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{n}^{(c)}$ (figure 6.2b).

- (iii) $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c$: on peut choisir n'importe quelle base orthogonale dans \mathbb{R}^3 pour $\{\mathbf{n}^{(a)}, \mathbf{n}^{(b)}, \mathbf{n}^{(c)}\}$ (figure 6.2c) et le tenseur ϵ s'exprime par :

$$\epsilon = \epsilon_a \mathbf{1} \quad (6.39)$$

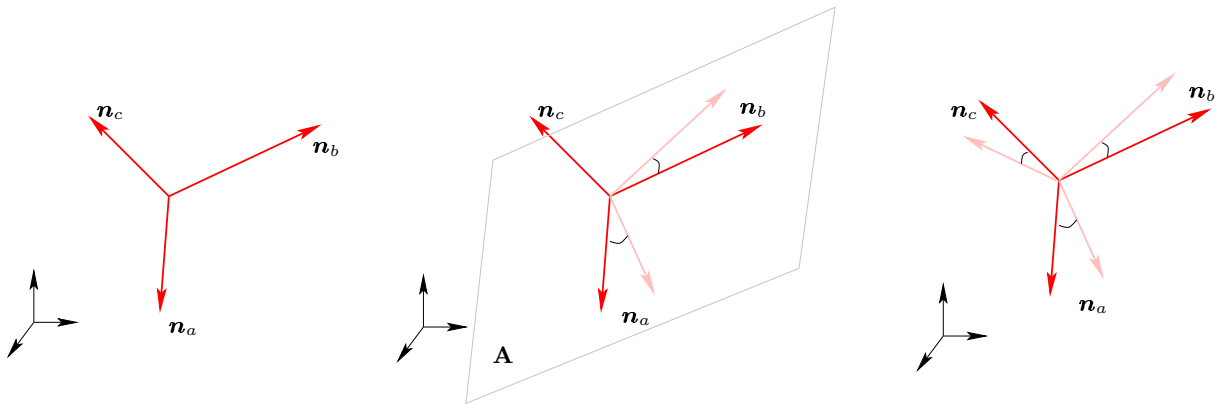


FIGURE 6.2. Trois cas pour les déformations principales

■ PROPOSITION 6.1

Soit $\epsilon = \sum_{a=1}^3 \epsilon_a \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}$ la décomposition spectrale de ϵ , si ϵ_a est une valeur principale unique de ϵ on peut écrire l'expression explicite du tenseur du 2^e ordre $\mathbf{m}^{(a)} := \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}$ en fonction de

ϵ de la façon suivante :

$$\boxed{\mathbf{m}^{(a)} = \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} = \frac{\epsilon - (I_1 - \epsilon_a) \mathbf{1} + I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon^{-1}}{D_a}} \quad (6.40)$$

avec $D_a = 2\epsilon_a - I_1 + I_3 \epsilon_a^{-2}$

Démonstration.

Par définition, on a $\sum_{a=1}^3 \mathbf{m}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} = \mathbf{1}$. Multiplions $\mathbf{m}^{(a)}$ par le produit $(\epsilon_a - \epsilon_b)(\epsilon_a - \epsilon_c)$:

$$\begin{aligned} (\epsilon_a - \epsilon_b)(\epsilon_a - \epsilon_c) \mathbf{m}^{(a)} &= \epsilon_a^2 \mathbf{m}^{(a)} + \epsilon_b \epsilon_c \mathbf{m}^{(a)} - \epsilon_a (\epsilon_b + \epsilon_c) \mathbf{m}^{(a)} \\ &= \epsilon_a^2 \mathbf{m}^{(a)} + \epsilon_b \epsilon_c \mathbf{m}^{(a)} - \epsilon_a (\epsilon_b + \epsilon_c) (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(b)} - \mathbf{m}^{(c)}) \\ &= \epsilon_a (\epsilon_a \mathbf{m}^{(a)} + \epsilon_b \mathbf{m}^{(b)} + \epsilon_c \mathbf{m}^{(c)}) \\ &\quad + I_3 (\epsilon_a^{-1} \mathbf{m}^{(a)} + \epsilon_b^{-1} \mathbf{m}^{(b)} + \epsilon_c^{-1} \mathbf{m}^{(c)}) - \epsilon_a (I_1 - \epsilon_a) \mathbf{1} \\ &= \epsilon_a [\epsilon + I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon^{-1} - (I_1 - \epsilon_a) \mathbf{1}] \end{aligned} \quad (6.41)$$

dans ce calcul, on a utilisé la décomposition du tenseur inverse de ϵ : $\epsilon^{-1} = \sum_{a=1}^3 \epsilon_a^{-1} \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}$ et l'équation (6.40) est déduite en utilisant (6.36)(6.37).

□

REMARQUE 6.3.2

La proposition (6.40) est validée si et seulement si $D_a \neq 0$. En notant que D_a peut autrement s'écrire par $D_a = (\epsilon_a - \epsilon_b)(\epsilon_a - \epsilon_c)/\epsilon_a$, la condition d'existence de $\mathbf{m}^{(a)}$ est vérifiée si ϵ_a est une racine simple de l'équation $p(\epsilon) = 0$.

■ PROPOSITION 6.2

Soit ϵ_a une valeur principale de ϵ . A partir de (6.31), ϵ_a est une fonction de ϵ , $\epsilon_a = \epsilon_a(\epsilon)$ et ses dérivées s'expriment par :

$$\boxed{\frac{\partial \epsilon_a}{\partial \epsilon} = \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} \equiv \mathbf{m}^{(a)}} \quad (6.42)$$

Démonstration.

La dérivée de la formule spectrale de ϵ nous donne :

$$d\epsilon = \sum_{b=1}^3 [d\epsilon_b \mathbf{n}^{(b)} \otimes \mathbf{n}^{(b)} + \epsilon_b d\mathbf{n}^{(b)} \otimes \mathbf{n}^{(b)} + \epsilon_b \mathbf{n}^{(b)} \otimes d\mathbf{n}^{(b)}] \quad (6.43)$$

en contractant cette équation avec $\mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}$ et en utilisant le fait que $\|\mathbf{n}^{(a)}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$, on obtient :

$$d\epsilon : (\mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}) = d\epsilon_a \quad (6.44)$$

qui donne (6.42). □

REMARQUE 6.3.3

Suite à cette proposition, on peut aussi déterminer les dérivées des invariants I_1, I_2, I_3 en fonction de ϵ dans le cas $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ comme suit :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \epsilon} = \mathbf{1} \quad ; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon} = I_1 \mathbf{1} - \epsilon \quad ; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon} = I_3 \epsilon^{-1} \quad (6.45)$$

■ PROPOSITION 6.3

La dérivée de $\mathbf{m}^{(a)}$ en fonction de ϵ s'exprime explicitement par :

$$\partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(a)} = \frac{1}{D_a} \left[\left(\mathbb{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon^{-1} \otimes \epsilon^{-1} - D'_a \mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(a)} \right. \right. \\ \left. \left. + I_3 \epsilon_a^{-1} \mathbb{I}_{\epsilon^{-1}} \right) + \left(\mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{m}^{(a)} \right) \right] \\ - \frac{I_3 \epsilon_a^{-2}}{D_a} \left(\mathbf{m}^{(a)} \otimes \epsilon^{-1} + \epsilon^{-1} \otimes \mathbf{m}^{(a)} \right) \quad (6.46)$$

où $D_a = 2\epsilon_a - I_1 + I_3 \epsilon_a^{-2}$; $D'_a = 2 - 2I_3 \epsilon_a^{-3}$; \mathbb{I} est le tenseur identité du quatrième ordre :

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.47)$$

où δ_{ij} est le delta de Kröneckner ; la notation $\mathbb{I}_{\epsilon^{-1}}$ désigne un tenseur du quatrième ordre qui est défini par :

$$(\mathbb{I}_{\epsilon^{-1}})_{ijkl} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ik}^{-1} \epsilon_{jl}^{-1} + \epsilon_{il}^{-1} \epsilon_{jk}^{-1}) \quad (6.48)$$

Démonstration.

A partir de (6.40), on a : $D_a \mathbf{m}^{(a)} = \epsilon - (I_1 - \epsilon_a) \mathbf{1} + I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon^{-1}$ et pour montrer (6.46), il suffit d'exprimer $\partial_{\epsilon} [D_a \mathbf{m}^{(a)}]$ soit :

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon} [D_a \mathbf{m}^{(a)}] &= \mathbb{I} - \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(a)}) + \epsilon^{-1} \otimes (I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon_a^{-1} - I_3 \epsilon_a^{-2} \mathbf{m}^{(a)}) + I_3 \epsilon_a^{-1} \mathbb{I}_{\epsilon^{-1}} \\ &= \mathbb{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{m}^{(a)} + I_3 \epsilon_a^{-1} \epsilon^{-1} \otimes \epsilon^{-1} - I_3 \epsilon_a^{-2} \epsilon^{-1} \otimes \mathbf{m}^{(a)} + I_3 \epsilon_a^{-1} \mathbb{I}_{\epsilon^{-1}} \end{aligned} \quad (6.49)$$

autrement, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon} [D_a \mathbf{m}^{(a)}] &= D_a \partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(a)} \otimes \partial_{\epsilon} D_a \\ &= D_a \partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(a)} \otimes [2\mathbf{m}^{(a)} - \mathbf{1} + I_3 \epsilon^{-1} \epsilon_a^{-2} - 2I_3 \epsilon_a^{-3} \mathbf{m}^{(a)}] \\ &= D_a \partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(a)} + D'_a \mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(a)} - \mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{1} + I_3 \epsilon_a^{-2} \mathbf{m}^{(a)} \otimes \epsilon^{-1} \end{aligned} \quad (6.50)$$

prenant l'égalité entre (6.49) et (6.50), on déduit (6.46).

□

B. Expression explicite de la relation $\sigma - \epsilon$ et du module tangent

On va chercher les formules de la contrainte σ et du module tangent \mathbb{C} en dérivant la fonction énergie de déformation (\hat{W}) qui a été déterminée par les déformations principales dans la section 6.2.2. On a vu aussi que dans le cas où $p(\epsilon)$ (Eq. 6.31) a des racines multiples (des racines doubles ou triples), D_a s'annule et $\mathbf{m}^{(a)}$ devient indéfini parce qu'il n'y pas de solution unique pour $\mathbf{m}^{(a)}$ (REMARQUE 6.3.1). Il y a deux solutions possibles qu'on peut utiliser pour résoudre ce problème :

1. Soit on peut le résoudre numériquement en ajoutant une petite perturbation à la déformation principale et considérer le problème toujours comme dans le cas où les trois racines sont différentes. Cette façon de faire simplifie beaucoup au niveau du calcul, mais pose des difficultés dans le choix des perturbations numériques. Surtout avec les formules unilatérales, les perturbations peuvent changer le signe des variables et ensuite changent complètement la direction du module tangent.
2. Soit on développe chaque cas différent entre les 3 valeurs principales et l'influence de la perturbation peut être évitée. Ici, on va utiliser cette méthode et on verra que les tenseurs $\mathbf{m}^{(a)}$ correspondant aux valeurs principales multiples n'interviennent pas dans les calculs.

(a) Si $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq \epsilon_c$

Par définition, la contrainte est la dérivée au 1^e ordre de la fonction de densité d'énergie (6.2). Comme $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq \epsilon_c$, on peut décomposer cette dérivée dans la base principale :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \epsilon_a} \frac{\partial \epsilon_a}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.51)$$

sachant que $\partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \epsilon_a = \mathbf{m}^{(a)}$ (6.42), on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}} \quad (6.52)$$

Cela représente la décomposition spectrale de $\boldsymbol{\sigma}$: $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \sigma_a \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)}$ avec $\sigma_a = \hat{W}_{,a}$ qui sont les valeurs principales de $\boldsymbol{\sigma}$. On voit bien que les directions principales du tenseur des contraintes sont identiques à celles du tenseur de déformation.

On dérive encore une fois la fonction énergie de déformation afin de calculer le module tangent :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \left(\sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \mathbf{m}^{(a)} \right) \\ &= \sum_{a=1}^3 \mathbf{m}^{(a)} \otimes \frac{\partial \hat{W}_{,a}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \frac{\partial \mathbf{m}^{(a)}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (6.53)$$

en développant cette expression comme dans (6.51), on peut exprimer le module tangent :

$$\boxed{\mathbb{C} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \hat{W}_{,ab} \mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(b)} + \sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{m}^{(a)}} \quad (6.54)$$

(b) Si $\epsilon_a = \epsilon_b \neq \epsilon_c$

Si le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ a deux (et seulement deux) valeurs principales identiques, il n'y a que le vecteur principal dans l'autre direction qui peut être déterminé. Comme on a vu dans (6.38), la contrainte peut aussi s'exprimer en fonction de la troisième direction principale :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \hat{W}_{,a} (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) + \hat{W}_{,c} \mathbf{m}^{(c)}} \quad (6.55)$$

et la dérivée de $\boldsymbol{\sigma}$ donne le module tangent :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab}) \mathbb{I} + \hat{W}_{,ab} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ &\quad + (\hat{W}_{,cc} - \hat{W}_{,aa} + 2\hat{W}_{,ab} - 2\hat{W}_{,ac}) \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} \\ &\quad + (\hat{W}_{,ac} - \hat{W}_{,ab}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{1}) \\ &\quad + [(\hat{W}_{,c} - \hat{W}_{,a}) - (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab})(\epsilon_c - \epsilon_a)] \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{m}^{(c)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Démonstration.

Posons $\sigma_i = \hat{W}_{,i}$ ($i = a, b, c$), on dérive l'équation $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{m}^{(i)}$ pour trouver le module tangent :

$$\mathbb{C} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{m}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}^{(i)} \otimes \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon_j} \mathbf{m}^{(j)} \quad (6.57)$$

L'égalité de $\epsilon_a = \epsilon_b$ nous donne $\hat{W}_{,a} = \hat{W}_{,b}$ (ou $\sigma_a = \sigma_b$). On a en conséquence :

$$\hat{W}_{,aa} = \lambda H(-\text{tr}\epsilon) + 2\mu H(-\epsilon_a) = \hat{W}_{,bb} \quad (6.58)$$

$$\hat{W}_{,ac} = \lambda H(-\text{tr}\epsilon) = \hat{W}_{,bc} \quad (6.59)$$

Alors, on peut avoir les conditions supplémentaires suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_b} = \hat{W}_{,aa} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_b} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_a} = \hat{W}_{,ab} \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_c} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_c} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_b} = \hat{W}_{,ac} \quad (6.62)$$

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_c} = \hat{W}_{,cc} \quad (6.63)$$

On applique ces conditions dans (6.57) :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \sigma_a \partial_\epsilon (\mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)}) + \sigma_c \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} \\ & + \hat{W}_{,aa} (\mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)} \otimes \mathbf{m}^{(b)}) + \hat{W}_{,ab} (\mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(b)} + \mathbf{m}^{(b)} \otimes \mathbf{m}^{(a)}) \\ & + \hat{W}_{,ac} [(\mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)}) \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes (\mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)})] + \hat{W}_{,cc} \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Remplaçant $\mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)}$ par $\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & (\sigma_c - \sigma_a) \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} + \hat{W}_{,aa} \sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} \\ & + \hat{W}_{,ab} (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) - \hat{W}_{,ab} \sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} \\ & + \hat{W}_{,ac} [(\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)})] + \hat{W}_{,cc} \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Il reste le terme $\sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)}$ à définir. Pour faire cela, on considère l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} = & \partial_\epsilon \epsilon = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \mathbf{m}^{(i)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(i)} \\ = & \sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \epsilon_a \partial_\epsilon (\mathbf{m}^{(a)} + \mathbf{m}^{(b)}) + \epsilon_c \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} \\ = & \sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \epsilon_a \partial_\epsilon (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) + \epsilon_c \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} \\ = & \sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} + (\epsilon_c - \epsilon_a) \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} \end{aligned} \quad (6.66)$$

qui donne :

$$\sum_{i=a,b} \mathbf{m}^{(i)} \otimes \mathbf{m}^{(i)} = \mathbb{I} - \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} - (\epsilon_c - \epsilon_a) \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} \quad (6.67)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & [(\sigma_c - \sigma_a) - (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab})(\epsilon_c - \epsilon_a)] \partial_\epsilon \mathbf{m}^{(c)} + (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab}) \mathbb{I} \\ & + \hat{W}_{,ab} (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) \\ & + \hat{W}_{,ac} [(\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)})] \\ & + [\hat{W}_{,cc} - \hat{W}_{,aa} + \hat{W}_{,ab}] \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)} \end{aligned} \quad (6.68)$$

après simplification de cette équation, on obtient (6.56).

□

(c) Si $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c$

De façon semblable au cas précédent, la condition de symétrie des déformations principales impose que :

$$\hat{W}_{,a} = \hat{W}_{,b} = \hat{W}_{,c} \quad (6.69)$$

$$\hat{W}_{,aa} = \hat{W}_{,bb} = \hat{W}_{,cc} \quad (6.70)$$

On peut en déduire les conditions liants les trois valeurs principales dépendantes qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_b} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_c} = \hat{W}_{,aa} \quad (6.71)$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_b} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial \sigma_a}{\partial \epsilon_c} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial \sigma_b}{\partial \epsilon_c} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \epsilon_a} = \hat{W}_{,ab} \quad (6.72)$$

Ces conditions simplifient beaucoup la loi de comportement qui ne dépend que des dérivées de la densité d'énergie \hat{W} en fonction des déformations principales :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \hat{W}_{,a} \mathbf{1} \\ \mathbb{C} &= (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab}) \mathbb{I} + \hat{W}_{,ab} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned} \quad (6.73)$$

En résumé, pour un matériau dont la densité d'énergie est une fonction des déformations principales, à chaque état de déformation $\boldsymbol{\epsilon}$, on peut calculer explicitement $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbb{C} . La procédure de calcul est présentée dans le tableau 6.1.

TABLEAU 6.1. Procédure de calcul de $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbb{C} par la décomposition spectrale

- | |
|--|
| <p>(i) Calculer les invariants I_1, I_2, I_3 (Eq. 6.32)</p> <p>(ii) Trouver les déformations principales $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ en résolvant l'équation $p(\epsilon) = 0$ (Eq. 6.31)</p> $p(\epsilon_a) = -\epsilon_a^3 + I_1 \epsilon_a^2 - I_2 \epsilon_a + I_3 = 0$ <p>(iii) Calculer les dérivées de la fonction d'énergie de déformation : $\partial_i \hat{W}$ et $\partial_{ij}^2 \hat{W}$ ($i, j = 1 \div 3$)</p> <p>(iv) Comparer $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ (Eq. 6.74) et calculer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon})$ et le module tangente $\mathbb{C}(\boldsymbol{\epsilon})$:</p> <p>(a) Si $\epsilon_a \neq \epsilon_b \neq \epsilon_c$:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \mathbf{n}^{(a)} \otimes \mathbf{n}^{(a)} ;$ $\mathbb{C} = \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \hat{W}_{,ab} \mathbf{m}^{(a)} \otimes \mathbf{m}^{(b)} + \sum_{a=1}^3 \hat{W}_{,a} \partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(a)}$ <p>(b) Si $\epsilon_a = \epsilon_b \neq \epsilon_c$:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \hat{W}_{,a} (\mathbf{1} - \mathbf{m}^{(c)}) + \hat{W}_{,c} \mathbf{m}^{(c)}$ $\mathbb{C} = (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab}) \mathbb{I} + \hat{W}_{,ab} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\hat{W}_{,cc} - \hat{W}_{,aa} + 2\hat{W}_{,ab} - 2\hat{W}_{,ac}) \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{m}^{(c)}$ $+ (\hat{W}_{,ac} - \hat{W}_{,ab}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{m}^{(c)} + \mathbf{m}^{(c)} \otimes \mathbf{1}) + [(\hat{W}_{,c} - \hat{W}_{,a}) - (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab})(\epsilon_c - \epsilon_a)] \partial_{\epsilon} \mathbf{m}^{(c)}$ <p>(c) Si $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon_c$:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \hat{W}_{,a} \mathbf{1}$ $\mathbb{C} = (\hat{W}_{,aa} - \hat{W}_{,ab}) \mathbb{I} + \hat{W}_{,ab} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ |
|--|

REMARQUE 6.3.4

Dans les cas où la différence entre 2 déformations ϵ_a, ϵ_b est petite, cela induit des singularités numériques dans le calcul de $\mathbf{m}^{(a)}, \mathbf{m}^{(b)}$ si on utilise toujours la formule (6.40). Dans la mise en œuvre numérique, on va considérer ϵ_a, ϵ_b comme des valeurs identiques si $(|\epsilon_a|, |\epsilon_b|)$ vérifient la condition suivante :

$$|\epsilon_a - \epsilon_b| \leq \text{TOL} \times \epsilon_{max} \quad (6.74)$$

avec $\epsilon_{max} = \max(|\epsilon_a|, |\epsilon_b|, |\epsilon_c|)$ et $\text{TOL} = 10^{-3}$

6.4 Identification du comportement statique du ballast

On va présenter dans cette partie des travaux expérimentaux afin de trouver le comportement statique du micro ballast. Les essais uniaxiaux sont réalisés avec du ballast mis dans des tubes cylindriques. Les charges sont appliquées en plusieurs cycles afin d'atteindre un état stable pour le ballast.

6.4.1 Comportement 3D du ballast par essai uniaxial

A. Principe des essais

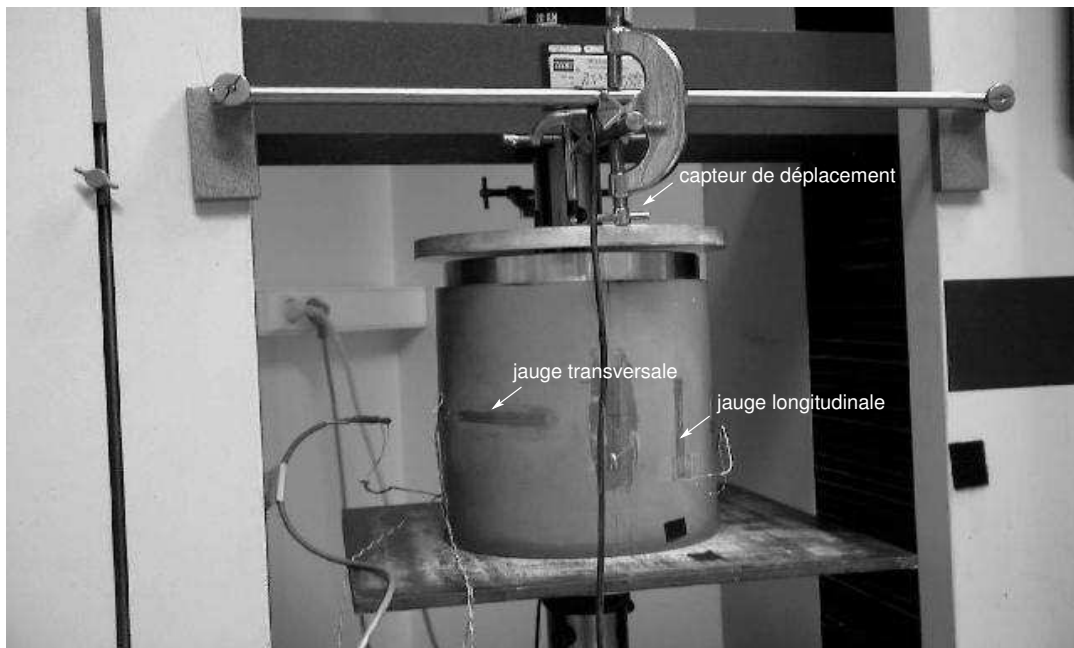
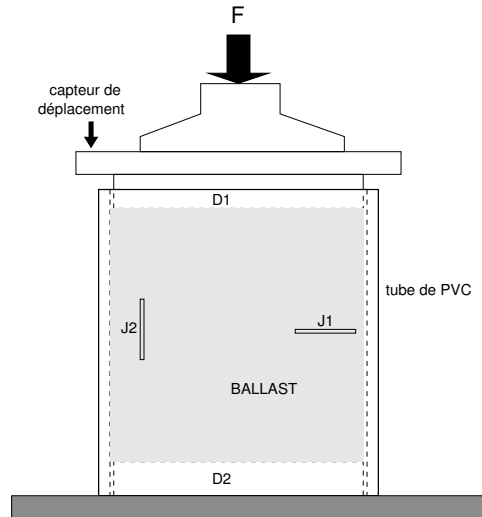


FIGURE 6.3. *Essai quasi-statique du ballast*

Préparation de l'essai. Le but est de trouver le comportement statique élastique du ballast en 3D par un essai uniaxial. On rappelle qu'avec une éprouvette de matériau homogène isotrope normal, les essais uniaxiaux permettent de déterminer les deux coefficients élastiques de Lamé en mesurant les déformations verticales et latérales. On va prendre le même principe pour le ballast. Comme les cailloux ne peuvent se tenir par eux mêmes, on les met dans un tube cylindrique. La déformation et la contrainte latérale du ballast peuvent être déterminées à partir de la déformation de ce tube. La figure 6.3 présente une photo de l'essai utilisé.

Le schéma de manip est présenté dans la figure 6.4. La charge est appliquée en utilisant une machine de traction - compression (INSTRON) qui est capable d'atteindre 20 kN. Les cailloux sont mis dans un tube de PVC et entre 2 disques rigides d'acier (D1 et D2). La dimension du tube de PVC est 20cm de diamètre, 20 cm de longueur et 3mm d'épaisseur. La force de compression est appliquée uniformément sur les cailloux par le disque D1 dont la dimension est 3cm d'épaisseur et qui peut être considéré comme très rigide par rapport au ballast. Le diamètre de D1 est 6mm plus petit que celui du tube PVC afin d'éviter la force de contact entre les deux.

La déformation verticale du ballast est déterminée à partir du déplacement de la surface où on applique la force. Ces valeurs sont obtenues en utilisant un capteur de déplacement (dont l'amplitude mesurable est $\pm 0.5\text{cm}$) qui est mis verticalement en dessus du plateau.

FIGURE 6.4. *Essai quasi-statique du ballast*

Les caractéristiques mécaniques du PVC utilisé sont déterminées simplement par un essai de compression du tube seul. Il nous donne une courbe linéaire qui est la relation entre la déformation axiale et la force verticale appliquée. La pente de cette courbe nous permet de déterminer la rigidité verticale du tube $E_{ver}^{PVC} = 1.23 \text{ GPa}$ ($E_{ver}^{PVC} = \sigma_{33}/\epsilon_{33}$). Le coefficient de Poisson du PVC ν est obtenu en mesurant la déformation latérale et vaut $\nu = 0.4$.

Le ballast utilisé dans cet essai est à l'échelle 1/3 et résulte d'un mélange de cailloux avec les 3 différentes coupures suivantes :

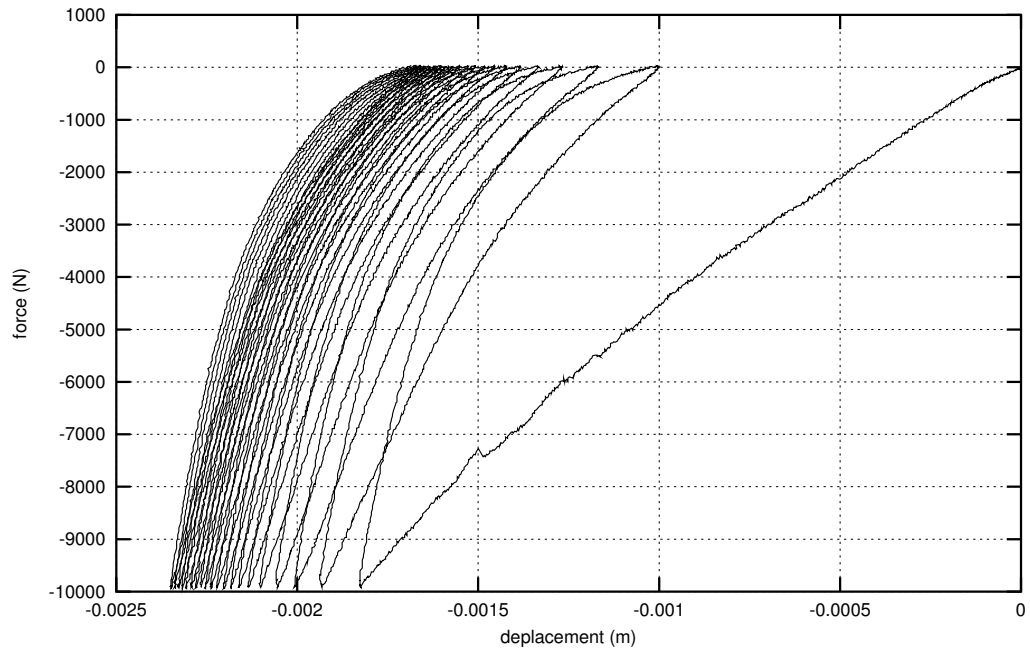
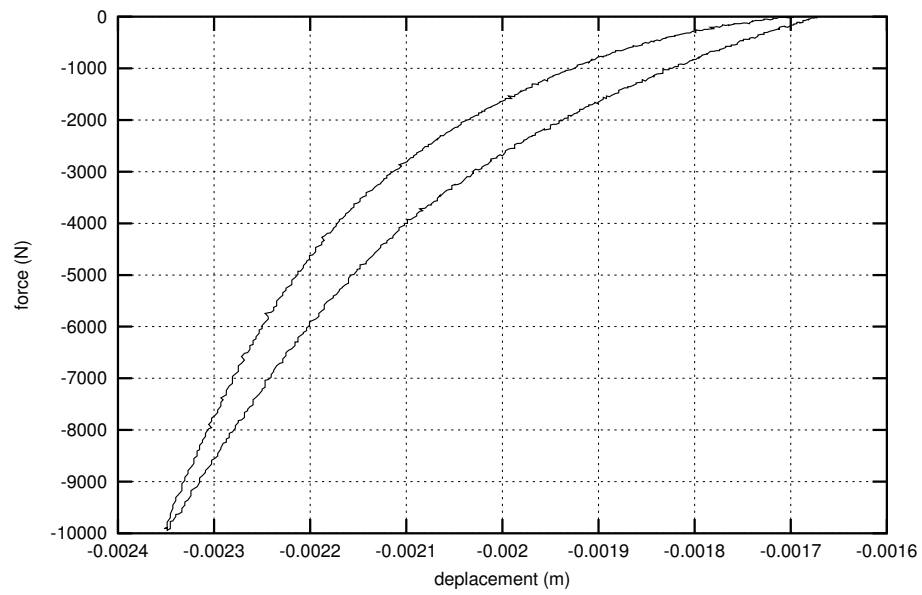
- 20 % pour la classe granulométrique 6-10 mm
- 30 % pour la classe granulométrique 10-14 mm
- 50 % pour la classe granulométrique 14-20 mm

Comme le comportement du ballast dépend beaucoup de sa mise en œuvre, les cailloux mis dans le tube de PVC sont d'abord pré-tassés en utilisant une machine de tassement.

La déformation latérale du ballast est récupérée à partir de la déformation du tube de PVC. Quand on applique une force verticale sur le ballast, elle va causer deux déformations dans le tube de PVC : la déformation radiale due à la pression interne et la déformation verticale due à la force de frottement entre les cailloux et le tube. Pour mesurer ces déformations, deux jauges longitudinales (J1) et deux jauges transversales (J2) sont donc collées symétriquement sur la surface extérieure du tube PVC au niveau du milieu de la hauteur du tube. Ces jauges ont des longueurs de 6cm et des résistances de 120Ω.

Procédure des essais. On applique les charges quasi-statiques en plusieurs cycles. L'amplitude maximale de la force appliquée est 10kN. La vitesse de déplacement de la barre transversale est 0.5mm/minute et les cycles de chargement sont contrôlés par le logiciel AUTOTRAC. Les signaux d'acquisition sont récupérés en utilisant le logiciel LABVIEW par une voie pour la force appliquée, une voie pour les capteurs de déplacement, deux voies pour les jauges longitudinales et deux voies pour les jauges transversales. La figure 6.5 présente une courbe donnant la relation entre la force appliquée et le déplacement vertical dans les 20 premiers cycles.

Calcul des paramètres du ballast Considérons le ballast comme un matériau élastique isotrope homogène, les caractéristiques du ballast sont déterminées en utilisant la formule de com-

FIGURE 6.5. *Relation force - déplacement*FIGURE 6.6. *Force - déplacement au dernier cycle*

portement élastique 3D :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (6.75)$$

On note d , D , e , L respectivement le diamètre intérieur, le diamètre extérieur, l'épaisseur et la longueur du tube PVC (Figure 6.4). Les capteurs de déplacement nous permettent de calculer la déformation verticale du ballast :

$$\epsilon_{33} = \frac{\Delta L}{L} \quad (6.76)$$

Comme la force appliquée est symétrique et le ballast est supposé homogène, la déformation est plane dans la section (A-A) et les déformations radiales (ϵ_{rr}) et tangentielles ($\epsilon_{\theta\theta}$) sont identiques³. Supposons que le déplacement soit continu entre le ballast et le tube, ces déformations s'expriment à partir de celles du tube PVC qu'on mesure par deux jauges transversales (ϵ_{trans}) :

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{trans} \quad (6.77)$$

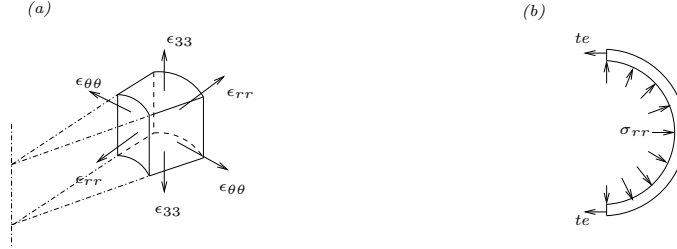


FIGURE 6.7. Notation de la déformation à un point (a) et de la pression interne (b)

En notant T la force totale de frottement sur la surface intérieure du tube, la contrainte verticale sur le ballast dans la section A-A est :

$$\sigma_{33} = \frac{P - T}{A_{ballast}} \quad (6.78)$$

où $A_{ballast}$ est l'aire de la section de ballast. La force de frottement T comprime le tube PVC et provoque une déformation longitudinale qu'on mesure par deux jauges longitudinales :

$$T = E_{ver}^{PVC} \epsilon_{longi} A^{PVC} \quad (6.79)$$

on en déduit :

$$\sigma_{33} = \frac{P - E_{ver}^{PVC} \epsilon_{longi} A^{PVC}}{A_{ballast}} \quad (6.80)$$

La pression σ_{rr} va causer une tension t uniforme (en utilisant l'hypothèse de tube mince) dans l'épaisseur du tube de PVC ($t = \frac{r}{e} \sigma_{rr}$) et une déformation ϵ_{trans} qu'on mesure par deux jauges transversales. Elle est alors déterminée :

$$\sigma_{rr} = \frac{te}{r} = \frac{E^{PVC} \epsilon_{trans} e}{r} \quad (6.81)$$

On connaît toutes les composantes de l'état de déformation et de contrainte dans le ballast, en utilisant (6.75) :

$$\sigma_{33} = \lambda \text{tr}\epsilon + 2\mu \epsilon_{33} \quad (6.82)$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \text{tr}\epsilon + 2\mu \epsilon_{rr} \quad (6.83)$$

deux coefficients de Lamé sont définis :

$$\mu = \frac{\sigma_{33} - \sigma_{rr}}{2(\epsilon_{33} - \epsilon_{rr})} \quad ; \quad \lambda = \frac{\sigma_{33} - 2\mu \epsilon_{33}}{\text{tr}\epsilon} \quad (6.84)$$

Le module d'Young et le coefficient de Poisson s'expriment :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{E - 2\mu}{2\mu} \quad (6.85)$$

On peut donc calculer λ et μ à chaque pas du chargement. On suppose que λ est une fonction de la dilatation $\lambda = \lambda(I_1)$ avec $I_1 = \text{tr}\epsilon$ et μ dans chaque direction est une fonction de la déformation $\mu = \mu(\epsilon_i)$.

³En supposant que la déformation radiale (ϵ_{rr}) dans la section A-A est constante, ϵ_{rr} peut s'exprimer par : $\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_r}{r}$. On a : $\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \epsilon_{rr}$ comme $u_\theta = 0$ (la déformation est symétrique par rapport à Or).

B. Discussion sur le résultat obtenu

- On constate que le tassement est très important et diminue de plus en plus après les cycles de chargement. On doit donc réaliser suffisamment de cycles afin d'obtenir un état stable. En fait, il faut environ 60-80 cycles de chargement.
- La courbe de force - déplacement au dernier cycle présentée sur la FIGURE 6.6 a une forme de type parabolique. La courbure en décharge est plus importante par rapport à la courbe en charge. Toutefois, la courbe de charge - décharge est fermée et on peut supposer que le ballast est un matériau élastique non-linéaire.
- Les figures 6.8 et 6.9 tracent les courbes de λ et μ en fonction de I_1 et ϵ . On constate que la rigidité du ballast s'accroît en fonction de la déformation. En plus, ces courbes $\lambda - I_1$ et $\mu - \epsilon$ sont assez régulières et ont aussi des formes paraboliques.

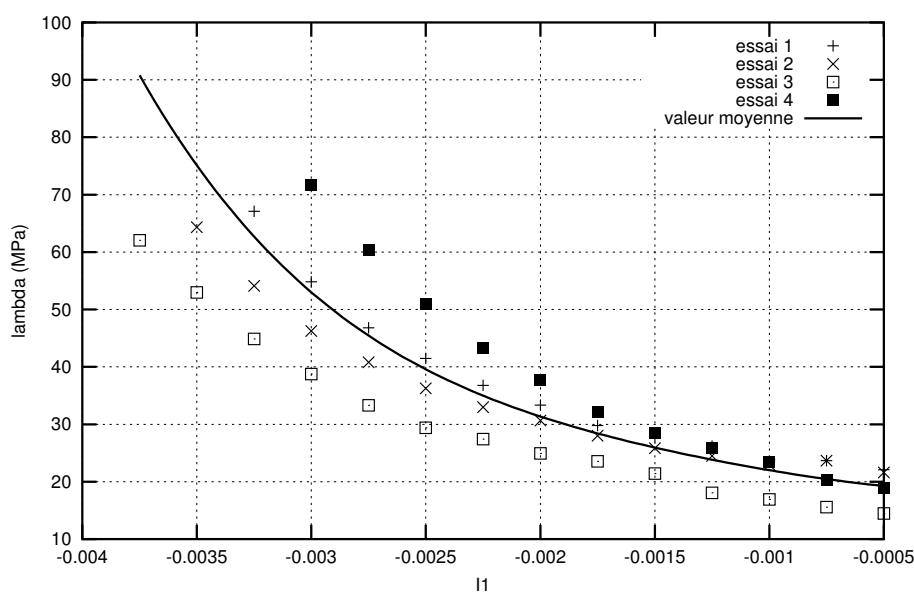


FIGURE 6.8. Coefficient λ en fonction de I_1

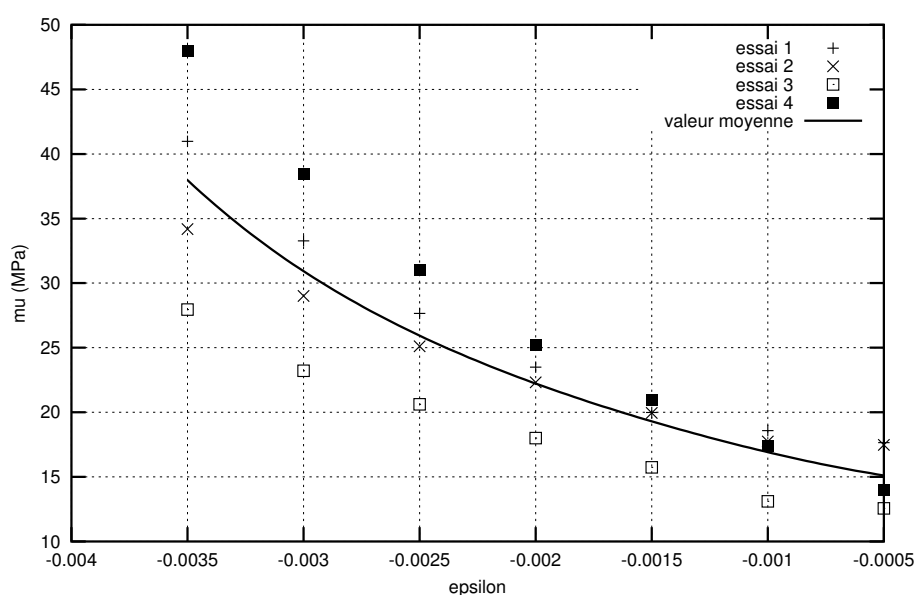


FIGURE 6.9. Coefficient μ en fonction de ϵ

- Les valeurs calculées sont très variées suivant les essais même avec des conditions aux limites identiques (le tube et le chargement), on peut remarquer que le caractère mécanique du ballast dépend beaucoup de l'état initial des cailloux dans le tube.
- Afin de déterminer les formules de λ et μ , on prend les valeurs moyennes des essais réalisés. On remarque que ces valeurs peuvent être ajustées avec des polynômes du 4^e ordre dont les coefficients sont les suivants :

$$\lambda = 7.1 \times 10^{11} I_1^4 + 3.18 \times 10^9 I_1^3 + 7.5 \times 10^6 I_1^2 + 1.54 \times 10^4 I_1 + 18.5 \quad (6.86)$$

$$2\mu = 1.8 \times 10^{11} \epsilon^4 + 9.51 \times 10^8 \epsilon^3 + 2.89 \times 10^6 \epsilon^2 - 5.94 \times 10^2 \epsilon + 14.2 \quad (6.87)$$

6.5 Validation numérique

La procédure de calcul des problèmes en élasticité 3D non-linéaire avec la décomposition spectrale du tenseur des déformations est intégrée dans le logiciel d'éléments finis CESAR (LCPC). On calcule un test numérique sur une structure simple pour démontrer le mécanisme d'effet non-tension dans la structure.

Ce calcul est destiné à simuler un essai quasi-statique sur le ballast. On applique une pression uniforme sur un talus de ballast dont la géométrie est un cône tronqué (figure 6.10).

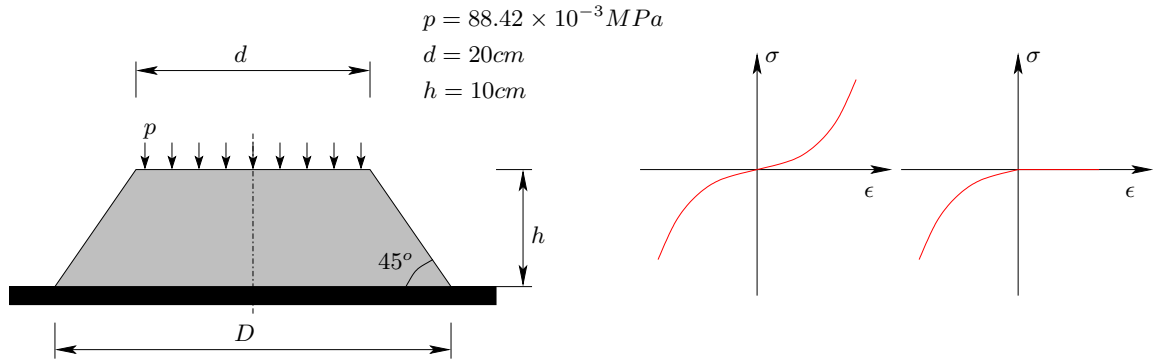


FIGURE 6.10. *Pression uniforme sur un talus de ballast*

On utilise le modèle élastique non-linéaire pour le ballast. La structure est calculée dans les deux cas d'élasticité normale et non-tension. Les coefficients $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont pris à partir des résultats expérimentaux (eqs. 6.86, 6.87).

Les figures suivantes présentent les résultats calculés dans les cas des lois de comportement élastique non-linéaire normale (Figures 6.11 - 6.14) et unilatérale (Figures 6.15 - 6.18). Comme la structure est symétrique, il suffit de visualiser les résultats dans une section verticale. La comparaison en chiffre est présentée dans le tableau 6.5.

On constate dans le contour des contraintes majeures (6.11) du cas élastique qu'il y a une zone de contraintes positives à côté de la surface latérale. La valeur maximale des contraintes positives ($\approx 1.5 \times 10^{-3} \text{MPa}$) est assez importante (environ 14%) par rapport à la valeur minimale des contraintes négatives ($\approx 1.0 \times 10^{-2} \text{MPa}$ Fig. 6.12). Au contraire, avec le modèle non-tension, il n'y a pas du tout de contraintes positives (Fig. 6.15 et 6.16). Les contraintes dans ce modèle s'arrangent et la valeur minimale des contraintes négatives est environ 14% plus importante par rapport au cas élastique.

La structure dans le cas non-tension est évidemment plus souple que l'autre. On a une valeur maximale de -0.0634mm pour le déplacement vertical dans le cas non-tension (Fig. 6.18). Par

comparaison avec le cas élastique où elle vaut -0.0414mm , elle est 53% plus grande. Aussi dans les déplacements latéraux, la différence est de 210%.

TABLEAU 6.2.

Valeurs maximales de	Modèle classique	Modèle non-tension	Différence
Contrainte principale positive	1.5×10^{-3} MPa	0	×
Contrainte principale négative	-1.03×10^{-2} MPa	-1.18×10^{-2} MPa	15%
Déplacement vertical	-4.14×10^{-2} mm	-6.344×10^{-2} mm	53%
Déplacement horizontal	1.38×10^{-2} mm	4.32×10^{-3} mm	210%

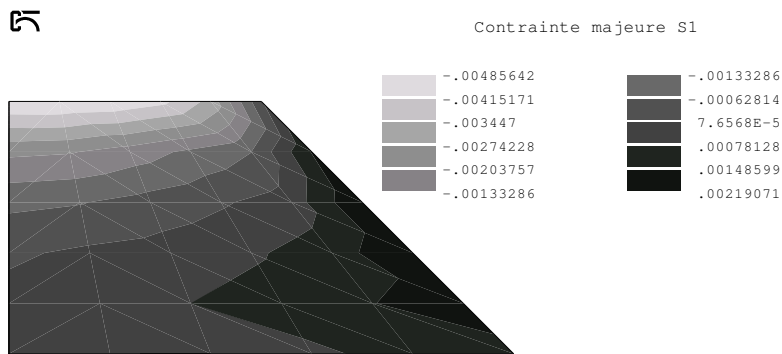


FIGURE 6.11. *Modèle élastique nonlinéaire - contrainte majeure*

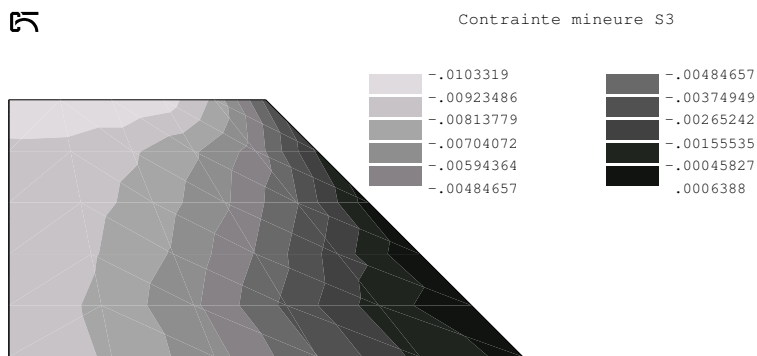


FIGURE 6.12. *Modèle élastique nonlinéaire - contrainte mineure*

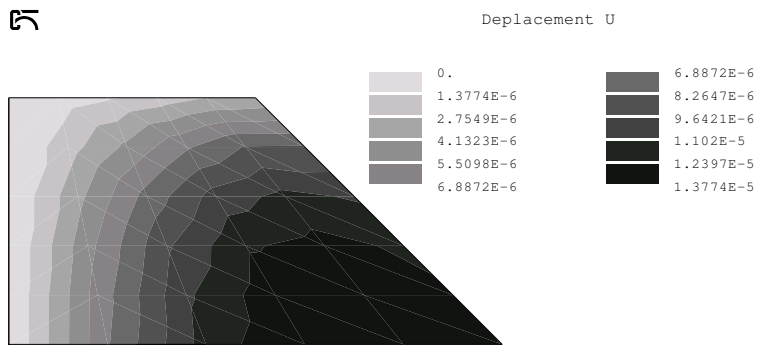
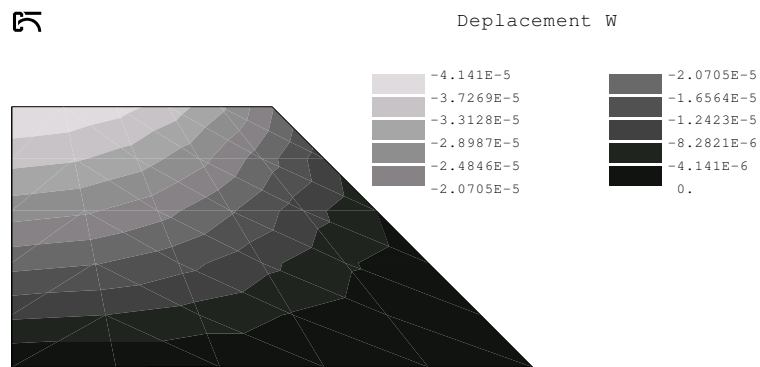
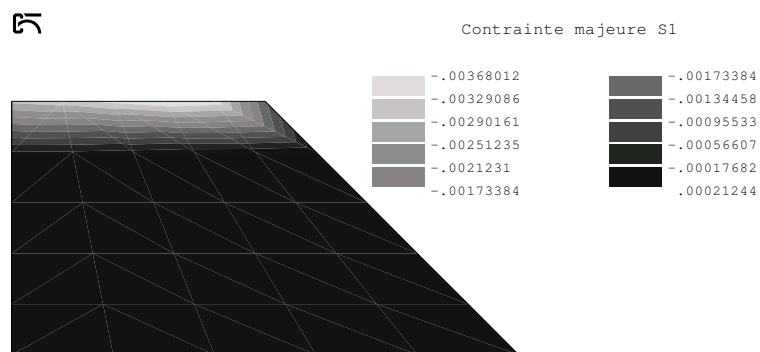
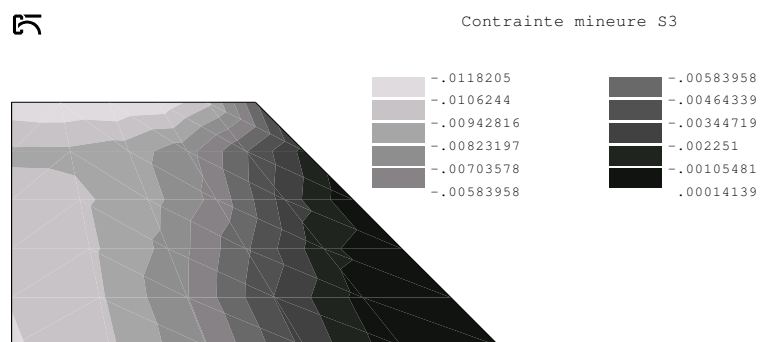
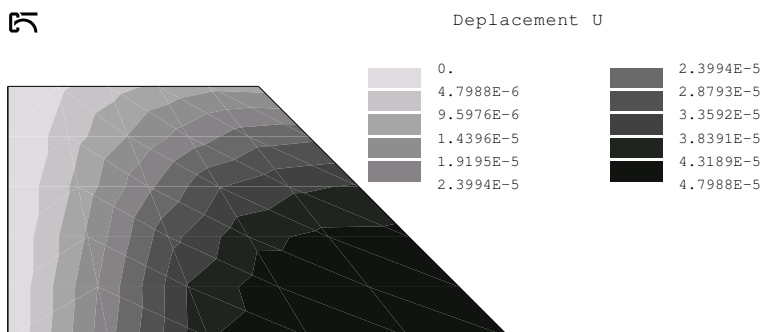
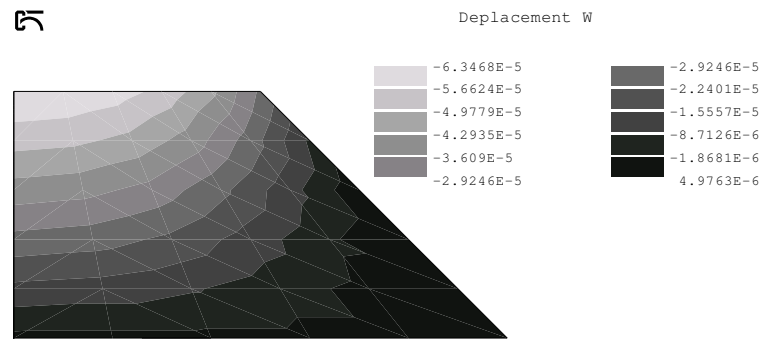


FIGURE 6.13. *Modèle élastique nonlinéaire - déplacement latéral*

FIGURE 6.14. *Modèle élastique nonlinéaire - déplacement vertical*FIGURE 6.15. *Modèle non tension - contrainte majeure*FIGURE 6.16. *Modèle non tension - contrainte mineure*FIGURE 6.17. *Modèle non tension - déplacement latéral*

FIGURE 6.18. *Modèle non tension - déplacement vertical*

6.6 Conclusion

On a proposé un modèle continu macroscopique des matériaux ballast. Vu les résultats d'essai obtenus, on peut dire que le comportement du ballast est du type élastique non-linéaire en compression. En revanche, la loi de comportement est introduite pour que les déformations en tension dans certaines directions ne causent aucune contrainte normale dans cette direction. Une fonction d'énergie de déformation est proposée en modifiant celle du cas élastique classique. La résolution numérique est faite par une procédure classique d'éléments finis pour le problème élastique non-linéaire qui est écrit dans la base principale des déformations.

Cette idée peut être utilisée pour les autres matériaux de type granulaire (comme le sable ...). En plus, avec la fonction d'énergie de déformation proposée, on peut facilement considérer les cas plus compliqués des matériaux avec de la visco-élasticité unilatérale ou de l'élasto-plasticité unilatérale.

Chapitre 7

Massif 3D non-linéaire soumis à une charge mobile.

7.1 Introduction

On a vu dans le chapitre 2 que le problème d'un massif multi-couche soumis à une charge mobile peut être résolu par une méthode semi-analytique. Cette méthode donne des résultats exacts mais n'est valable que dans le cas élastique. Dans les cas où on a un comportement non-linéaire des matériaux (qui n'est pas du tout négligeable pour des matériaux comme le ballast), la méthode des éléments finis doit être envisagée. Le problème se ramène à résoudre un système d'équations différentielles en temps avec les conditions initiales :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_0 \quad (7.2)$$

où \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, \mathbf{F} est le vecteur des forces extérieures qui n'est pas fixe dans l'espace. Un tel vecteur force demande un gros maillage pour pouvoir s'affranchir du régime transitoire ce qui est presque impossible dans le cas tridimensionnel.

Les parties suivantes présentent une méthode des éléments finis modifiée qui permet de passer directement dans le régime permanent et de traiter statiquement le problème dans un domaine mobile avec une modification de la matrice de rigidité.

7.2 Équations du problème

7.2.1 Équations d'équilibre dans le domaine mobile

On considère une structure solide tridimensionnelle occupant un domaine Ω : $\Omega = \{\mathbf{x}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ dont la frontière $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$. Supposons que Ω ne supporte qu'une force ponctuelle extérieure $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ d'amplitude variable en fonction du temps (ou constante) $\mathbf{f}_0(t)$ qui se déplace suivant l'axe Ox avec une vitesse v constante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_0(t)\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z) \quad (7.3)$$

Le problème consiste à déterminer quels sont les champs mécaniques (déplacement, vitesse, accélération) stationnaires dans la structure. On note $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur déplacement : $(\mathbf{x}, t) \in$

$\Omega \times]0, T[$ où T est l'intervalle de temps du calcul. On peut écrire l'équation d'équilibre dans Ω et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \mathbf{Div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (7.4)$$

où ρ est la masse volumique, \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface Γ_{σ} , $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes qui est relié au tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ par une loi de comportement qui, dans le cas élastique, s'écrit $\sigma_{ij}(\boldsymbol{\epsilon}) = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ avec $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]$.

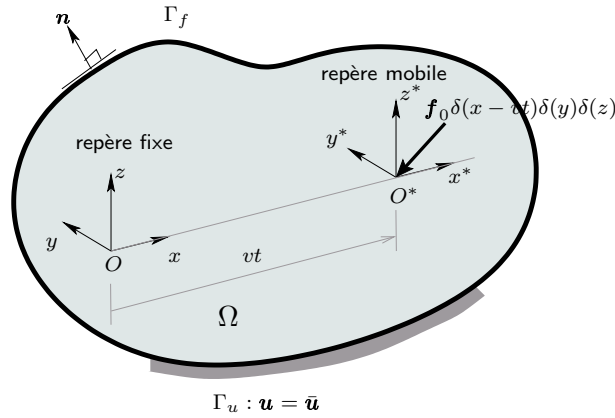


FIGURE 7.1.

On réalise un changement de coordonnées $\mathbf{x}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{x}^*(x - vt, y, z)$ et on ramène le domaine de calcul dans un nouveau repère qui s'attache à la position de la force. Dans ce nouveau repère, une certaine fonction h et sa dérivée en temps dépendent aussi de \mathbf{x}^* :

$$(h)(\mathbf{x}, t) = (h)^*(\mathbf{x}^*, t) \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h)(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x^*} \right) (h)^*(\mathbf{x}^*, t) \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(h)(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^*} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \right) (h)^*(\mathbf{x}^*, t) \quad (7.7)$$

En remplaçant ces relations dans (7.4), le système d'équations dans le domaine mobile s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t^2} - 2\rho v \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t \partial x^*} + \rho v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x^{*2}} - \mathbf{Div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}^*, t) &= 0 & \mathbf{x}^* \in \Omega^* \\ \boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{f}_0 \delta(x^*) \delta(y) \delta(z) & \mathbf{x}^* \in \Gamma_{\sigma}^* \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{0} & \mathbf{x}^* \in \Gamma_u^* \end{aligned} \quad (7.8)$$

Le problème consiste donc à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles du 2^e ordre par la méthode des éléments finis. Afin de simplifier la notation, on va supprimer les "*" dans les expressions qui suivent.

7.2.2 Formulation faible et discrétisation

Nous utilisons la procédure classique des éléments finis pour résoudre le système (7.8). L'expression de la formulation faible de ce problème s'écrit :

$$W = \int_{\Omega} \left\langle \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - 2\rho v \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t \partial x} + \rho v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} - \mathbf{Div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\rangle d\Omega = 0$$

$$\forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in C^{ad} \quad (7.9)$$

où \langle, \rangle représente le produit scalaire et $\delta \mathbf{u}$ est la fonction test qui est définie dans l'espace des déplacements admissibles C^{ad} .

Pour simplifier la notation, on note $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}$ et $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{u}_{,x}$. En utilisant la formule de Green dans l'intégration (7.9) et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient :

$$W = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} 2\rho v \dot{\mathbf{u}}_{,x} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho v^2 \mathbf{u}_{,x} \cdot \delta \mathbf{u}_{,x} d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (7.10)$$

Le domaine Ω est représenté par un ensemble de sous domaines $\Omega = \sum_e \Omega^e$ et l'intégration (7.10) est définie par : $W = \sum_e W = \sum_e [\int_{\Omega^e} (\cdot) + \int_{\Gamma^e} (\cdot)]$. L'intégration dans chaque élément Ω^e peut être évaluée en fonction des déplacements aux noeuds \mathbf{U}^e par l'approximation :

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i^e(t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U}^e(t) \quad (7.11)$$

où \mathbf{N} est la fonction d'interpolation. La fonction test du type de Galerkin utilise la même fonction d'interpolation que \mathbf{u}^e : $\delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N} \delta \mathbf{U}^e$.

Rappelons que pour la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, le produit $(\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon})$ est habituellement représenté par $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^t \underline{\delta \boldsymbol{\epsilon}}$ qui peut s'exprimer en fonction de \mathbf{U} grâce à (7.11) [51] :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23}\}^t = \mathbf{D} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (7.12)$$

$$\underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23}\}^t = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (7.13)$$

De la même façon, on a aussi $\underline{\delta \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$. En remplaçant ces approximations dans (7.10), on obtient :

$$W^e = (\delta \mathbf{U}^e)^t \left(\int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega \right) \ddot{\mathbf{U}}^e - (\delta \mathbf{U}^e)^t \left(\int_{\Omega^e} 2\rho v \mathbf{N}^t \mathbf{N}_{,x} d\Omega \right) \dot{\mathbf{U}}^e$$

$$+ (\delta \mathbf{U}^e)^t \left(- \int_{\Omega^e} \rho v^2 \mathbf{N}_{,x}^t \mathbf{N}_{,x} d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{U}^e$$

$$- (\delta \mathbf{U}^e)^t \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^t \mathbf{f}^e d\Gamma \quad (7.14)$$

L'assemblage des sous domaines Ω^e (7.14) mène au système d'équations dynamique suivant :

$$\boxed{\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{U}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t)} \quad (7.15)$$

où :

- \mathbf{M} est la matrice de masse : $\mathbf{M} = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}^t \mathbf{N} d\Omega$.

- $\tilde{\mathbf{C}}$ est la matrice d'amortissement mobile : $\tilde{\mathbf{C}} = - \sum_e \int_{\Omega^e} 2\rho v \mathbf{N}^t \mathbf{N}_{,x} d\Omega$.
- $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_s - \mathbf{K}_v$ est la matrice de rigidité mobile avec :
 - $\mathbf{K}_s = \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$ représente la matrice de rigidité statique de la structure.
 - $\mathbf{K}_v = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho v^2 \mathbf{N}_{,x}^t \mathbf{N}_{,x} d\Omega$ représente l'influence de la vitesse v .
- $\mathbf{F} = \sum_e \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^t \mathbf{f}^e d\Gamma$ est le vecteur force extérieure.

REMARQUE 7.2.1

1. On peut montrer facilement que $[\mathbf{K}_v]$ et $[\mathbf{K}_s]$ sont deux matrices symétriques et positives. La symétrie de $[\tilde{\mathbf{K}}]$ est donc toujours assurée.
2. La matrice d'amortissement $\tilde{\mathbf{C}}$ est non-symétrique.
3. L'équation (7.15) présente très bien l'influence de la vitesse de la charge mobile sur la structure. Le problème mobile a une rigidité plus faible que dans le cas statique. Dans le cas statique, le vecteur déplacement est obtenu simplement par $\{\mathbf{U}\} = [\tilde{\mathbf{K}}]^{-1} \{\mathbf{F}\}$. Plus la vitesse est élevée, plus la rigidité mobile est faible, et plus le champ de déplacement est important.
4. La positivité de $[\tilde{\mathbf{K}}]$ dépend de la valeur de la vitesse v . La matrice de rigidité $[\tilde{\mathbf{K}}]$ pourrait ne pas être positive avec une vitesse v suffisamment grande. Dans ce cas, la forme faible (7.9) n'est plus valable (théorème de Lax-Migram).

7.2.3 Résolution du problème non-linéaire statique.

Dans le cas où l'amplitude de la charge est constante, la solution stationnaire dans le repère mobile devient statique, et le système d'équations d'éléments finis se réduit à :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \mathbf{F}} \quad (7.16)$$

Dans le cas nonlinéaire, une procédure itérative doit être envisagée. On peut utiliser la méthode de Newton-Raphson classique pour ce problème de charge mobile (7.16). Supposons qu'on a une loi de comportement qui s'écrit sous la forme : $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon})]\{\boldsymbol{\epsilon}\}$, la procédure de calcul est résumée dans le schéma suivant :

(a) A l'itération i : $\mathbf{U}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}$:

◦ Calcul du vecteur résidu :

$$\mathbf{R}^{(i)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}^{(i)} d\Omega - \int_{\Omega} \rho v^2 \mathbf{N}_{,x}^t \mathbf{N}_{,x} \mathbf{U}^{(i)} d\Omega - \mathbf{F} \quad (7.17)$$

◦ Calcul de la matrice tangente :

$$\tilde{\mathbf{K}}_T^{(i)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^t \mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}) \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \rho v^2 \mathbf{N}_{,x}^t \mathbf{N}_{,x} d\Omega \quad (7.18)$$

(b) Calcul d'incrément et mise à jour de la solution à l'itération i :

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)} = - \left(\tilde{\mathbf{K}}_T^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{R}^{(i)} \quad (7.19)$$

$$\mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta \mathbf{U}^{(i+1)} \quad (7.20)$$

(c) Vérification de la convergence

$$\frac{\langle \mathbf{R}^{(i)}, \Delta \mathbf{U}^{(i+1)} \rangle}{\langle \mathbf{R}^{(0)}, \Delta \mathbf{U}^{(1)} \rangle} < \text{TOL} \quad (7.21)$$

où TOL est une tolérance autorisée. Si la condition (7.21) est vérifiée, la solution finale est $\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}\}^{(i+1)}$. Sinon, on revient en (a) et on calcule la nouvelle itération.

On voit bien que par rapport au cas statique, la vitesse n'intervient dans la matrice tangente de rigidité que comme une constante. Le calcul du comportement des matériaux peut donc être réalisé de façon indépendante.

La matrice de rigidité modifiée dans le domaine mobile a été implémentée dans le code d'éléments finis CESAR du LCPC.

7.3 Validation

On présente une validation numérique dans le cas où il y a une force qui se déplace sur la surface libre d'un demi espace élastique infini. Comme ce problème est symétrique par rapport au plan Ox, Oz , on peut enlever une moitié du modèle (la partie $y < 0$) et ajouter la condition $u_y = 0$. La structure est modélisée dans un domaine de dimension $(-16, 16) \times (0, 16) \times (-16, 0)$ par un maillage de 9581 noeuds et de 2000 éléments cubiques de 20 noeuds. Les noeuds aux surfaces extérieures sont fixés. Les paramètres du matériau utilisé sont : module d'Young $E = 130\text{MPa}$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Une force ponctuelle de 1000N est appliquée au point $(0, 0, 0)$.

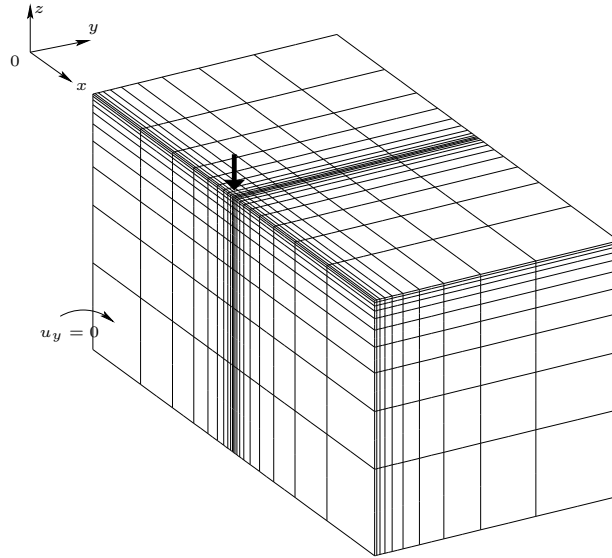


FIGURE 7.2. Maillage de la structure

7.3.1 Solution linéaire

Ci-dessous sont les solutions des déplacements verticaux au niveau de la profondeur de 0.35m dans le plan $y = 0$. La figure (7.3) présente une comparaison entre la solution analytique et la solution par éléments finis dans le cas de la vitesse $v = 50\text{m/s}$. On obtient une petite différence entre ces deux solutions qui vient du fait qu'on a utilisé une condition fixe aux limites.

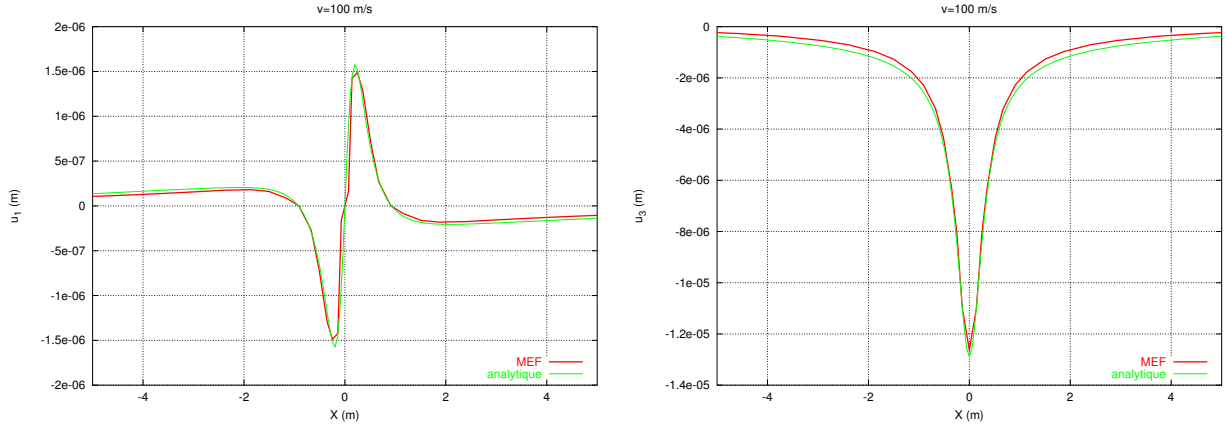


FIGURE 7.3. Comparaison des solutions analytique et par éléments finis

Dans la figure (7.4), on compare les déplacements verticaux dans les cas où la force se déplace avec les vitesses de 50m/s , 100m/s , 150m/s , 180m/s . Cette comparaison montre bien l'effet très important de la vitesse de la charge sur la structure.

On remarque aussi que le problème ne peut pas être résolu pour les vitesses plus élevées comme pour ce massif, la vitesse de Rayleigh vaut $\approx 190\text{m.s}^{-1}$.

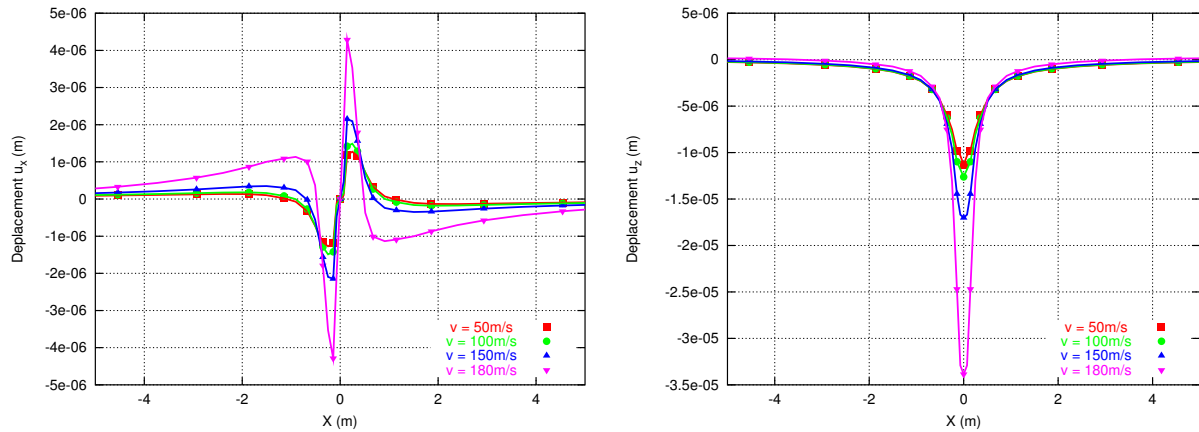


FIGURE 7.4. Les déplacements dûs aux différentes vitesses

7.3.2 Solution non-linéaire

On s'intéresse maintenant au problème d'un massif non-linéaire soumis à une charge mobile. Pour ce faire, on va introduire une non linéarité de type *unilatéral* (qu'on a présenté dans le chapitre précédent) dans la structure considérée.

On suppose que le matériau est élastique linéaire unilatéral avec un module d'Young en tension (E_t) qui vaut la moitié de celui en compression ($E_c = 130\text{MPa}$).

La figure 7.5 présente les résultats de déplacement horizontal et vertical en comparant avec ceux des cas linéaires : soit avec une rigidité E_t , soit avec une rigidité E_c . On a obtenu une solution de déplacement vertical qui se trouve entre les deux solutions linéaires, puisque ce massif non-linéaire est plus souple que celui avec E_c et est plus rigide que l'autre.

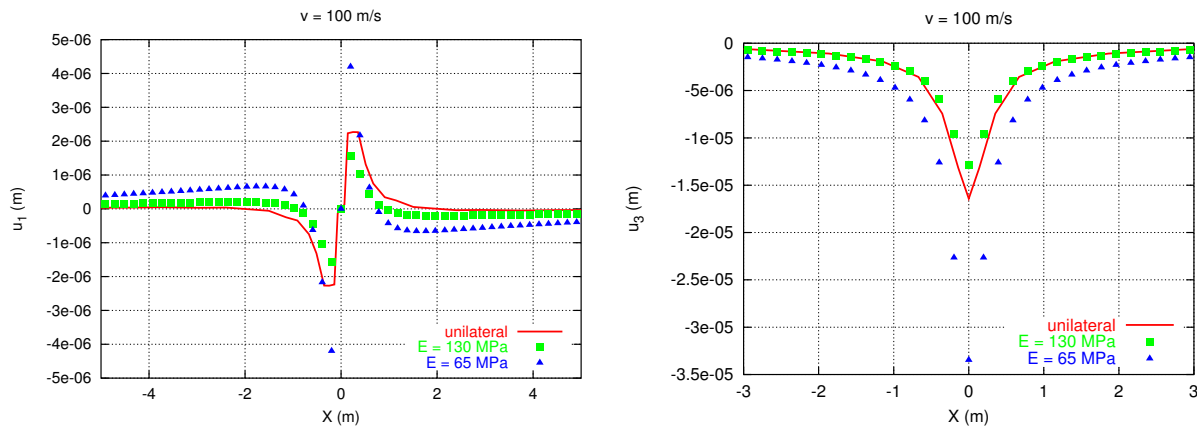


FIGURE 7.5. Déplacement horizontal et vertical dans un massif non-linéaire.

7.4 Couplage d'une poutre et d'un demi-espace à deux couches

On réalise dans cette partie des calculs sur un problème plus réaliste. Le modèle de calcul est un couplage entre une poutre, qui représente le rail, et un demi-espace constitué de deux couches, qui représentent la couche de ballast et sol.

7.4.1 Maillage

Le maillage de calcul est présenté dans la figure 7.6. Comme le problème est symétrique par rapport au plan Oxz , on ne maille que la partie $y \geq 0$. Le maillage se compose de trois groupes d'éléments de différents matériaux pour le rail, la couche de ballast et le sol.

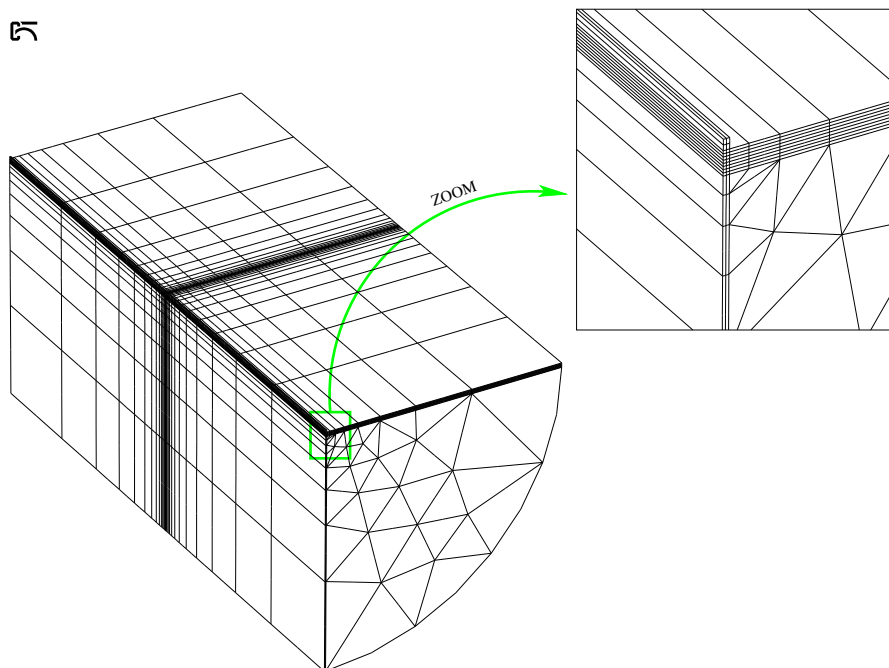


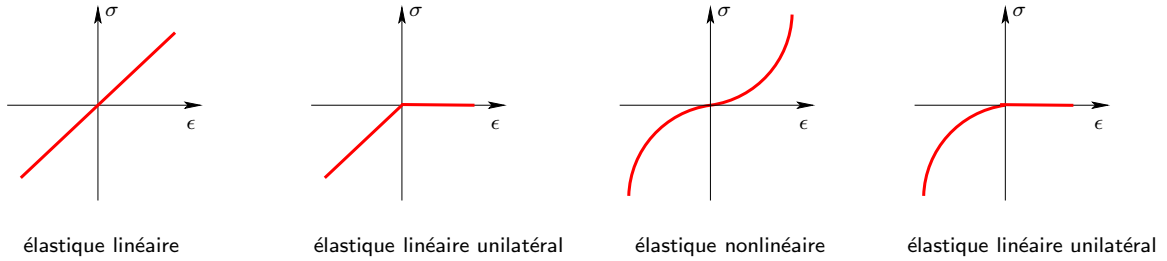
FIGURE 7.6. Maillage

- **Le rail.** Pour simplifier la géométrie de la section- I du rail mais garder la même répartition de charge sur le ballast, on introduit une section de forme rectangulaire qui a toujours la même largeur et aussi le même moment d'inertie I . Appelons la largeur et la hauteur de cette section rectangulaire par b et h , elles sont déterminées en fonction de S et I par : $h = \sqrt[3]{\frac{12I}{b}}$ et la masse volumique utilisée pour le rail est égale à $\rho' = \frac{\rho S_{rail}}{bh}$. Dans ce calcul où le rail qu'on utilise a $b = 15\text{ cm}$, $\rho S = 60.34\text{ kg/m}$ et $I = 3060\text{ cm}^4$, on peut utiliser une section rectangulaire dont $h = 13.5\text{ cm}$, $b = 15\text{ cm}$ et $\rho' = 2980\text{ kg/m}^3$ ⁽¹⁾.

Dans CESAR, cette poutre est maillée par des éléments volumiques de type cubique de 20 noeuds et on utilise quatre éléments pour chaque section. Dans le calcul, on suppose qu'elle reste toujours élastique linéaire.

- **Le ballast.** La couche de ballast est modélisée comme une couche infinie dont l'épaisseur est de 30 cm . C'est dans cette couche que la non linéarité sera introduite. Cette couche est modélisée par des éléments cubiques de 20 noeuds.

Pour les calculs linéaires, le module d'Young du ballast est égal à 130 MPa . Pour les calculs non-linéaires, on utilise les polynômes de λ et μ qu'on a identifiés dans le chapitre précédent.



- **Le sol.** Le sol est aussi supposé être élastique linéaire et est maillé par des éléments prismes de 15 noeuds. Le module d'Young du sol est pris égal à $E_s = 100\text{ MPa}$.

Le maillage a 16761 noeuds au total avec 4088 éléments (2800 éléments cubiques de 20 noeuds et 1288 éléments prismes de 15 noeuds).

La charge est une force constante d'amplitude 170 kN appliquée sur la poutre.

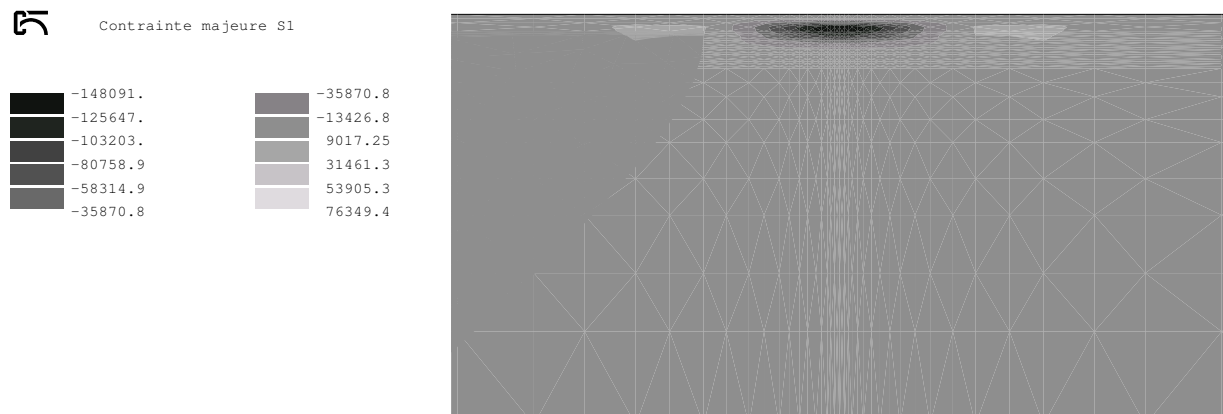
7.4.2 Résultats et discussions

Les résultats sont obtenus en réalisant des calculs avec les quatre cas de comportement du ballast : élastique linéaire et élastique nonlinéaire, avec ou sans comportement unilatéral.

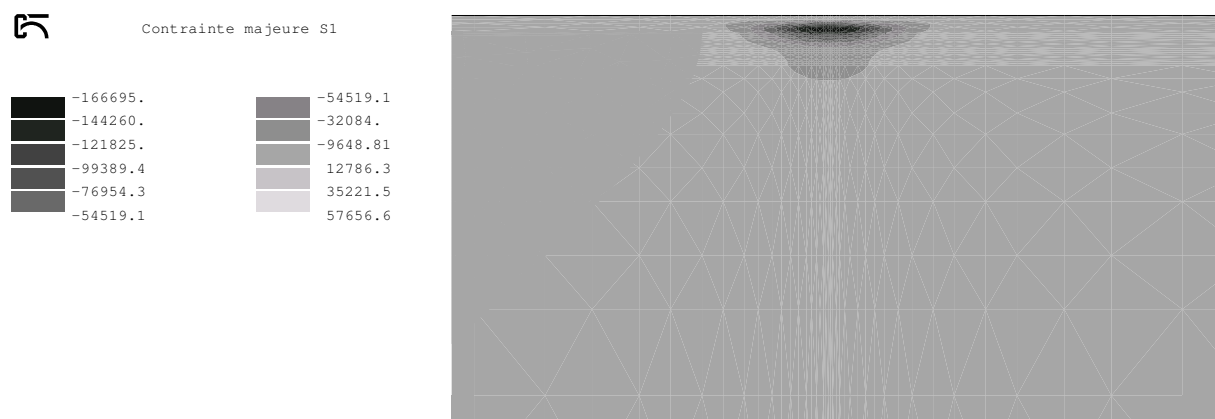
On visualise dans la figure 7.7 les contours des contraintes principales maximales dans le plan $y = 0$. On peut constater que la zone où il existe des contraintes principales positives dans le modèle linéaire va disparaître en utilisant la loi unilatérale. Par contre, les contraintes négatives sont plus importantes dans le modèle unilatéral.

La figure 7.8 présente les comparaisons des déplacements verticaux au niveau $z = -15\text{ cm}$ (la moitié de l'épaisseur de la couche de ballast) dans la surface $y = 0$. On constate que les déplacements verticaux avec le comportement unilatéral sont plus importants, surtout dans le cas non-linéaire. Dans le cas non-linéaire, le déplacement statique dû à la gravité est beaucoup plus important avec le modèle unilatéral.

¹On peut aussi utiliser une section rectangulaire équivalente en gardant le même ρ , mais elle aura une largeur très petite qui ne peut pas bien représenter la répartition de la charge



(a) Comportement élastique linéaire



(b) Comportement élastique linéaire unilatéral

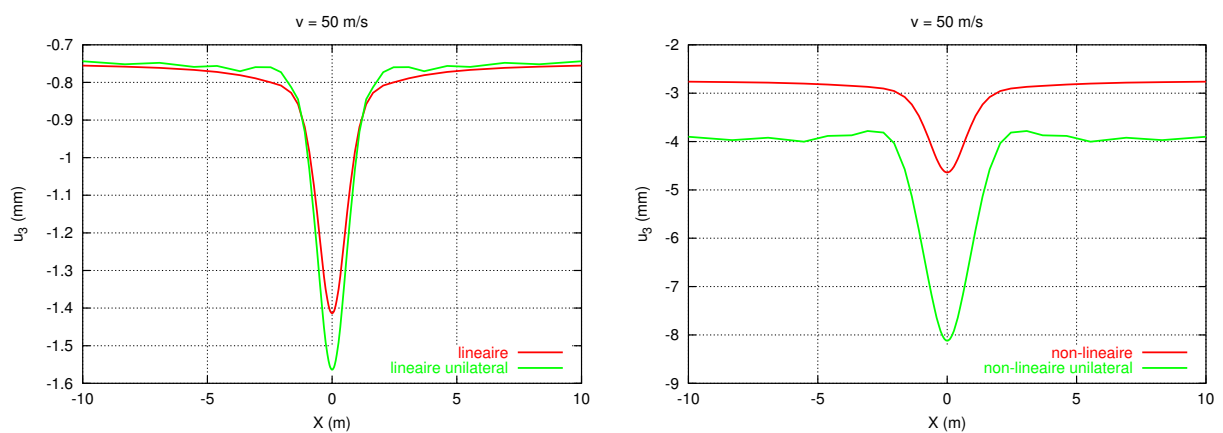
FIGURE 7.7. Contour des contraintes principales maximales dans surface $y = 0$ 

FIGURE 7.8. Comparaison des déplacements verticaux avec ou sans effet unilatéral : problème linéaire (gauche) et nonlinéaire (droite)

Si on néglige le déplacement dû à la force de gravité, on trouve que les amplitudes des déplacements verticaux correspondant aux comportements non-linéaires sont beaucoup plus importants par rapport à ceux des cas linéaires. L'hypothèse linéaire n'est donc pas suffisante pour le calcul.

Ces remarques montrent que les deux composantes non-linéaires (unilatéral et élastique non-linéaire) sont aussi importantes pour la réponse de la structure.

La figure 7.9 montre l'effet de vitesse de la charge sur le déplacement vertical. On voit bien que le déplacement ne varie pas linéairement en fonction de la vitesse. Quand cette vitesse est petite (le cas $v = 25 \text{ m/s}$), il n'y a quasiment pas d'effet dynamique dû au mouvement de la charge. Cet effet dynamique devient nettement plus important dans le modèle unilatéral.

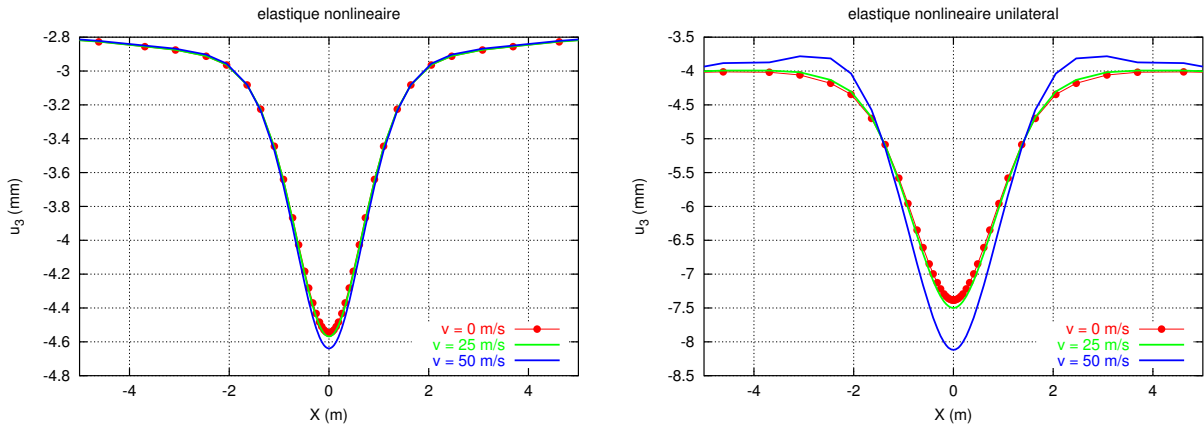


FIGURE 7.9. Comparaison des déplacements verticaux en fonction de la vitesse

Avec les déplacements obtenus, on peut aussi déterminer les accélérations par la relation $\ddot{u}(x) = v^2 \partial_{xx} u(x)$. La figure 7.10 présente des comparaisons des accélérations calculées avec les modèles différents. Les dérivées en x sont calculées directement à partir des vecteurs de déplacement en utilisant des outils numériques. Les accélérations obtenues avec les modèles linéaires sont nettement inférieures à celles calculées avec les modèles non-linéaires. Cette remarque se signifie, qu'avec un

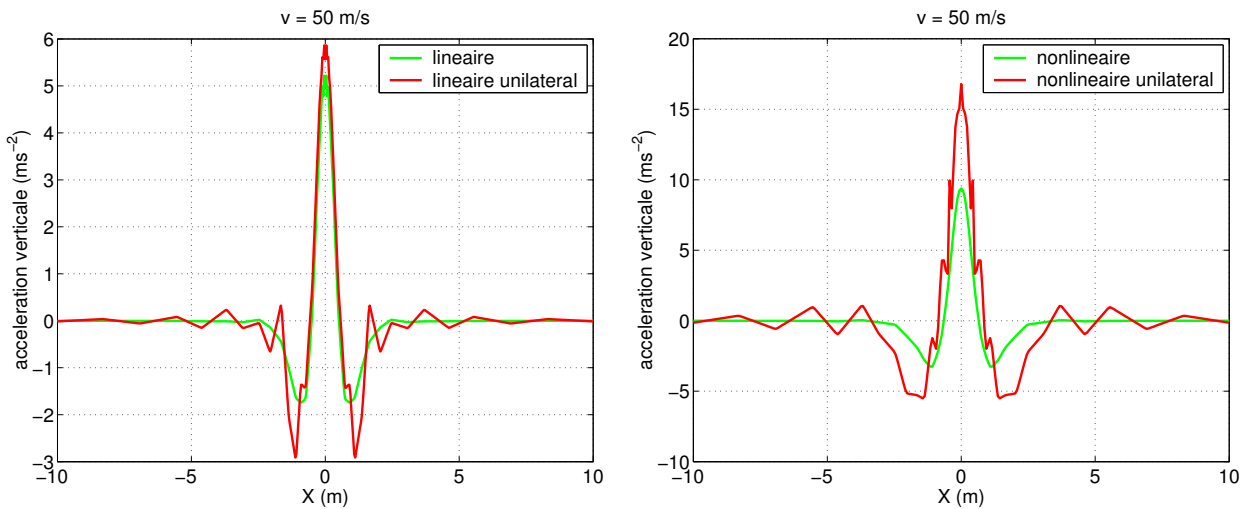


FIGURE 7.10. Comparaison des accélérations

ballast bien bourré dont le comportement est assez rigide et linéaire, l'accélération verticale est moins importante.

7.5 Conclusion

On a présenté une formulation par éléments finis pour résoudre les problèmes de charge mobile en régime permanent par un changement de coordonnées. L'avantage de cette méthode est que l'on peut traiter le problème avec une charge fixe comme en statique. Cette méthode n'est valable que dans les cas où la vitesse de la charge reste subsonique.

Le modèle n'est pas encore étudié en détail, mais on peut faire les remarques suivantes :

- Dans le cas élastique, cette méthode est valable seulement dans les cas où la vitesse de la charge est inférieure à une vitesse critique qui correspond à la plus petite vitesse d'onde de Rayleigh dans le milieu.
- Dans le cas unilatéral, la vitesse critique diminue. On remarque aussi que même si la rigidité en tension dans le ballast est nulle, il y a toujours des ondes de cisaillement qui peuvent se propager de façon normale.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

Les phénomènes physiques et les approches de résolution du problème dynamique non-linéaire des structures infinies soumises à des charges mobiles ont été étudiés. Dans ce mémoire, on s'est concentré sur les influences du mouvement de la charge (en tenant éventuellement compte des effets d'amplitudes variables) pour plusieurs modèles de structures (unidimensionnel, tridimensionnel) avec différents comportements. Les solutions obtenues ont des valeurs et des natures qui dépendent strictement des caractéristiques des charges et des structures.

Les calculs réalisés montrent que la surcharge due à la vitesse de la charge est très importante et ne peut pas être négligée dans une étude de dimensionnement des structures soumises à une charge mobile. Par exemple, dans le cas linéaire (chapitre 2), les amplitudes des solutions augmentent de façon exponentielle en fonction de la vitesse de la charge. Plus en détail, on peut constater aussi que le facteur le plus important qui décide le mécanisme de propagation d'ondes dans le problème de charge mobile est le rapport entre la vitesse de la charge et les vitesses des ondes du milieu. Ce rapport distingue le problème en deux régimes principaux : *régime subsonique* et *régime supersonique*. En passant de l'un à l'autre, on définit une vitesse critique de la charge. Dans cette étude, une autre vitesse critique a été aussi définie, pour laquelle le champ d'accélération commence à avoir des valeurs qui dépassent la gravité.

Les évaluations préliminaires sur le modèle linéaire montrent que, dans les cas où la rigidité est faible, la charge peut atteindre la vitesse critique et au delà de cette vitesse, des ondes de chocs sont créées, qui provoquent des déplacements et des accélérations très importants. Ces calculs ont montré aussi que, en absence du rail, une force ponctuelle n'est pas très utile pour représenter une charge de véhicule à cause de sa forme singulière, surtout dans la détermination des accélérations. Cet inconvénient peut être amélioré en utilisant une force répartie.

Le mécanisme de la propagation d'ondes devient beaucoup plus complexe en introduisant des comportements non-linéaires dans la structure. Deux types différents de non-linéarité qui peuvent s'adapter pour le ballast et qui sont élaborés dans le chapitre 6, ont été utilisés dans ce travail : le premier est l'élasticité non-linéaire et l'autre est l'unilatéralité. La non-linéarité se traduit par des situations dans lesquelles certaines zones dans la structure sont en subsonique, tandis que d'autres peuvent être en supersonique. On a trouvé dans le chapitre 3, pour un problème uniaxial où on a uniquement un seul type d'ondes, des régimes complexes avec des ondes de choc à cause de ces phénomènes. Les calculs dans les cas 1D et 3D montrent que, en tenant compte de la non-linéarité des structures, la surcharge dynamique devient beaucoup plus importante que celle correspondant au calcul linéaire.

On a abordé des méthodes de résolution numérique du problème des structures soumises à des charges mobiles. En utilisant une approche semi-analytique, le programme MVLOAD a été écrit en langage C++ pour résoudre en régime permanent un problème d'un demi espace visco-élastique multicouche soumis à une charge mobile appliquée à la surface libre. Ce programme permet de déterminer les déplacements, les accélérations et aussi les contraintes dans chaque couche, quelle que soit la fréquence et la vitesse de la charge.

Les problèmes non-linéaires sont traités en utilisant la méthode des éléments finis, soit dans le repère fixe (*a*), soit dans le repère mobile (*b*). On a vu que le coût des calculs stationnaires dans le repère mobile est plus faible que les calculs transitoires dans le repère fixe. Deux approches différentes pour le calcul dans le repère mobile sont utilisées. La première (*b1*) transforme directement les équations dans le repère mobile par un changement de variable. Elle est plus simple pour la mise en oeuvre numérique mais n'est valable que dans les cas subsoniques. La deuxième (*b2*) réalise un changement de variable à partir des équations discrétisées. Elle permet de résoudre le problème avec toutes les vitesses mais a été validée uniquement pour les modèles 1D. On présente dans le tableau ci-dessous les problèmes et les approches correspondantes possibles, ainsi que celles utilisées dans ce mémoire.

méthode	régime			modèle utilisé dans la thèse
	subsonique	supersonique	transonique	
(<i>a</i>)	x	x	x	1D
(<i>b1</i>)	x	o	o	3D
(<i>b2</i>)	x	x	o	1D

'x' = valable, 'o' = non valable.

Par ailleurs, dans le calcul des modèles 1D de poutres, on a introduit une condition aux limites absorbante qui peut amortir les ondes en utilisant une couche dont l'amortissement croît en fonction de la distance au point considéré et à la source.

Perspectives

Le modèle semi-analytique est très utile pour des études préliminaires grâce à sa rapidité en temps de calcul même pour une structure 3D. Pour l'application aux voies ferrées, une étude plus précise peut être développée en ajoutant dans le problème présenté dans le chapitre 2 une poutre d'Euler-Bernoulli (ou de Timoshenko). Les appuis périodiques (les blochets) peuvent éventuellement être introduits afin d'avoir un modèle linéaire complet. Autrement, cette méthode peut être aussi utilisée pour des modèles viscoélastiques de routes. Un travail possible par la suite est d'introduire la loi de Huet-Sayleigh pour décrire le comportement visco-élastique des enrobés et de l'intégrer dans le logiciel ALIZE.

Le problème non-linéaire doit être étudié plus en détail pour les massifs. A partir des résultats obtenus dans cette thèse, on peut développer un modèle numérique sur CESAR incluant les comportements non-linéaires pour le ballast, les semelles et les sols, dans un premier temps dans le cas bidimensionnel. Le premier modèle est donc un rail posé sur des semelles visco-élastiques non-linéaires elles-mêmes reposant sur des traverses continues. Le tout est posé sur du ballast et sur un sol multicouche. Ensuite, les traverses continues peuvent être remplacées par des appuis discrets pour connaître l'influence des effets des appuis périodiques dans le cas d'une charge mobile. Ces modèles permettent aussi de savoir s'il est possible de remplacer le comportement multicouche bidimensionnel du sol par un comportement unidimensionnel équivalent. Dans le cas d'une réponse positive, on fournira un moyen de déterminer les paramètres 1D équivalents aux comportement 2D. Les mêmes problématiques peuvent être étudiées pour le modèle tridimensionnel.

En parallèle, on peut effectuer des mesures sur le banc d'essais d'abord pour obtenir la déflexion sous chargement statique qui sera comparée aux résultats des modèles 1D et 2D. En dynamique, on peut faire des mesures de fonctions de transfert entre un signal d'excitation et le signal mesuré par des accéléromètres en différents points de la structure. Enfin on peut solliciter la structure avec le signal M appliqué habituellement pour les essais de fatigue et on peut mesurer de nouveau l'accélération en différents points de la structure. Des calculs de structures avec les différents modèles pour ces trois types d'excitations peuvent être comparés avec les résultats de mesures.

On a étudié ici l'influence des non-linéarités dans les lois de comportement en restant cependant dans le domaine des petites déformations. Il conviendrait dans une étude ultérieure de traiter le cas des grandes déformations.

Annexes

Annexe A

Formule d'intégration adaptative de Filon

La formule de Filon permet d'évaluer numériquement l'intégration d'une fonction sinusoïdale $f(x) \cos(tx)$ dans un domaine $[x_0, x_n]$ [1]. En divisant $[x_0, x_n]$ en $2n$ intervalles, la formule de Filon s'écrit :

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x) \cos(tx) dx = h \{ \alpha(th) [f_{2n} \sin(tx_{2n}) - f_0 \sin(tx_0)] + \beta(th) C_{2n} + \gamma(th) C_{2n-1} + \frac{2}{45} th^4 S'_{2n-1} \} - R_n \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$h = \frac{x_{2n} - x_0}{2n} \quad (\text{A.2})$$

$$C_{2n} = \sum_{i=0}^n f_{2i} \cos(tx_{2i}) - \frac{1}{2} [f_{2n} \cos(tx_{2n}) + f_0 \cos(tx_0)]$$

$$C_{2n-1} = \sum_{i=1}^n f_{2i-1} \cos(tx_{2i-1}) \quad (\text{A.3})$$

$$S'_{2n-1} = \sum_{i=1}^n f_{2i-1}^{(3)} \sin(tx_{2i-1}) \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} + \frac{\sin(2\theta)}{2\theta^2} - \frac{2\sin^2\theta}{\theta^3} \quad (\text{A.5})$$

$$\beta(\theta) = 2 \left[\frac{1 + \cos^2\theta}{\theta^2} - \frac{\sin(2\theta)}{\theta^3} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma(\theta) = 4 \left(\frac{\sin\theta}{\theta^3} - \frac{\cos\theta}{\theta^2} \right), \quad (\text{A.7})$$

et l'erreur restante est :

$$R_n = \frac{1}{90} nh^5 f^{(4)}(\xi) + \mathcal{O}(th^7). \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

Charge statique sur un demi-espace élastique

On présente ici quelques résultats analytiques du problème d'un demi-espace soumis aux charges statiques à sa surface libre (réf. [56, chap. 3]).

B.1 Solution de Boussinesq

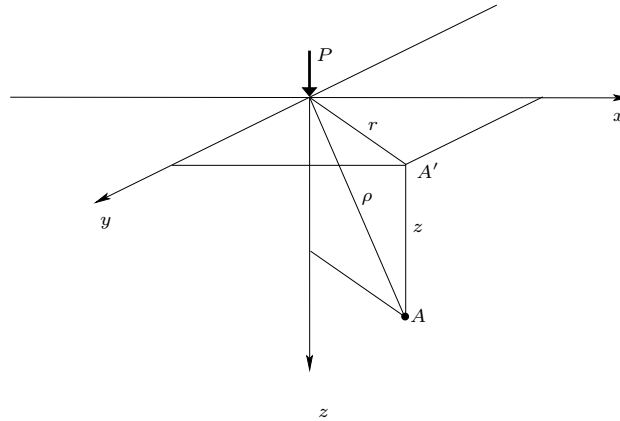


FIGURE B.1.

La solution de Boussinesq donne les expressions explicites de la réponse d'un demi-espace soumis à une force statique P à la surface libre (figure B.1). On note G le module de cisaillement élastique. ρ et r sont respectivement les distances entre la position de force et les points A et A' :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{B.1})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{B.2})$$

Les déplacements et les contraintes à un certain point $A(x, y, z)$ dans le demi-espace sont donnés par :

$$u_x = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$u_y = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{\rho^5} \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right\} \quad (\text{B.9})$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{\rho^5} \quad (\text{B.10})$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5} \quad (\text{B.11})$$

B.2 Pression uniforme sur une région circulaire

A partir de la solution de Boussinesq, on peut évaluer la réponse d'un demi-espace élastique soumis à une pression appliquée sur une région circulaire dans la surface libre. Si on applique une pression uniforme p sur un cercle de rayon a , les déplacements d'un point sur la surface libre sont donnés par :

$$\bar{u}_z = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} \mathbf{E}(r/a) \quad \text{si } r < a \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{u}_z = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} [\mathbf{E}(a/r) - (1-a^2/r^2)\mathbf{K}(a/r)] \quad \text{si } r > a \quad (\text{B.13})$$

où on note \mathbf{K} et \mathbf{E} les intégrales elliptiques complètes de premier et second type, respectivement. Au centre du cercle, $r = 0$, $\mathbf{E}(0) = \frac{\pi}{2}$ et à coté du cercle $r = a$, $\mathbf{E}(1) = 1$, donc :

$$(\bar{u}_z)_0 = \frac{2(1-\nu^2)pa}{E} \quad (\text{B.14})$$

$$(\bar{u}_z)_a = \frac{4(1-\nu^2)pa}{\pi E} \quad (\text{B.15})$$

Le déplacement moyen du cercle de charge est :

$$\bar{u} = \frac{16(1-\nu^2)pa}{3\pi E} \quad (\text{B.16})$$

Annexe C

Matrices élémentaires

$$\mathbf{M}_a^e = \begin{bmatrix} \frac{13\mathbf{A}_{11}^1 h}{35} & \frac{11\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{7\mathbf{A}_{12}^1 h}{20} & 0 & \frac{9\mathbf{A}_{11}^1 h}{70} & 0 & \frac{3\mathbf{A}_{12}^1 h}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{\mathbf{A}_{11}^1 h^3}{105} & \frac{\mathbf{A}_{12}^1 h^2}{20} & 0 & \frac{13\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{420} & -\frac{\mathbf{A}_{11}^1 h^3}{140} & \frac{\mathbf{A}_{12}^1 h^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7\mathbf{A}_{21}^1 h}{20} & \frac{\mathbf{A}_{21}^1 h^2}{20} & \frac{\mathbf{A}_{22}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{A}_{23}^1 h}{3} & \frac{3\mathbf{A}_{21}^1 h}{20} & -\frac{\mathbf{A}_{21}^1 h^2}{30} & \frac{\mathbf{A}_{22}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{A}_{23}^1 h}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{A}_{32}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{A}_{33}^1 h}{3} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{A}_{32}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{A}_{33}^1 h}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9\mathbf{A}_{11}^1 h}{70} & \frac{13\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{420} & \frac{3\mathbf{A}_{12}^1 h}{20} & 0 & \frac{13\mathbf{A}_{11}^1 h}{35} & -\frac{11\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{7\mathbf{A}_{12}^1 h}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{420} & -\frac{\mathbf{A}_{11}^1 h^3}{140} & -\frac{\mathbf{A}_{12}^1 h^2}{30} & 0 & -\frac{11\mathbf{A}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{\mathbf{A}_{11}^1 h^3}{105} & -\frac{\mathbf{A}_{12}^1 h^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\mathbf{A}_{21}^1 h}{20} & \frac{\mathbf{A}_{21}^1 h^2}{30} & \frac{\mathbf{A}_{22}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{A}_{23}^1 h}{6} & \frac{7\mathbf{A}_{21}^1 h}{20} & -\frac{\mathbf{A}_{21}^1 h^2}{20} & \frac{\mathbf{A}_{22}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{A}_{23}^1 h}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{A}_{32}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{A}_{33}^1 h}{6} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{A}_{32}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{A}_{33}^1 h}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{K}_{af}^e = \mathbf{A}_{11}^2 \begin{bmatrix} \frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & -\frac{12}{h^3} & \frac{6}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} & 0 & 0 & -\frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & 0 & 0 & \frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{h^2} & \frac{2}{h} & 0 & 0 & -\frac{6}{h^2} & \frac{4}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{M}_b^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13\mathbf{B}_{11}^1 h}{35} & \frac{11\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{7\mathbf{B}_{12}^1 h}{20} & 0 & \frac{9\mathbf{B}_{11}^1 h}{70} & 0 & \frac{3\mathbf{B}_{12}^1 h}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{\mathbf{B}_{11}^1 h^3}{105} & \frac{\mathbf{B}_{12}^1 h^2}{20} & 0 & \frac{13\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{420} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^1 h^3}{140} & \frac{\mathbf{B}_{12}^1 h^2}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7\mathbf{B}_{21}^1 h}{20} & \frac{\mathbf{B}_{21}^1 h^2}{20} & \frac{\mathbf{B}_{22}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{B}_{23}^1 h}{3} & \frac{3\mathbf{B}_{21}^1 h}{20} & -\frac{\mathbf{B}_{21}^1 h^2}{30} & \frac{\mathbf{B}_{22}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{B}_{23}^1 h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{B}_{33}^1 h}{3} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{B}_{33}^1 h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\mathbf{B}_{11}^1 h}{70} & \frac{13\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{420} & \frac{3\mathbf{B}_{12}^1 h}{20} & 0 & \frac{13\mathbf{B}_{11}^1 h}{35} & -\frac{11\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{7\mathbf{B}_{12}^1 h}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{420} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^1 h^3}{140} & -\frac{\mathbf{B}_{12}^1 h^2}{30} & 0 & -\frac{11\mathbf{B}_{11}^1 h^2}{210} & \frac{\mathbf{B}_{11}^1 h^3}{105} & -\frac{\mathbf{B}_{12}^1 h^2}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\mathbf{B}_{21}^1 h}{20} & \frac{\mathbf{B}_{21}^1 h^2}{30} & \frac{\mathbf{B}_{22}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{B}_{23}^1 h}{6} & \frac{7\mathbf{B}_{21}^1 h}{20} & -\frac{\mathbf{B}_{21}^1 h^2}{20} & \frac{\mathbf{B}_{22}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{B}_{23}^1 h}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^1 h}{6} & \frac{\mathbf{B}_{33}^1 h}{6} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^1 h}{3} & \frac{\mathbf{B}_{33}^1 h}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{C}_b^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{11}^2}{2} & \frac{B_{11}^2 h}{10} & -\frac{B_{12}^2}{2} & 0 & \frac{B_{11}^2}{2} & -\frac{B_{11}^2 h}{10} & \frac{B_{12}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{11}^2 h}{10} & 0 & -\frac{B_{12}^2 h}{12} & 0 & \frac{B_{11}^2 h}{10} & -\frac{B_{11}^2 h^2}{60} & \frac{B_{12}^2 h}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{21}^2}{2} & \frac{B_{21}^2 h}{12} & -\frac{B_{22}^2}{2} & -\frac{B_{23}^2}{2} & \frac{B_{21}^2}{2} & -\frac{B_{21}^2 h}{12} & \frac{B_{22}^2}{2} & \frac{B_{23}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{32}^2}{2} & -\frac{B_{33}^2}{2} & 0 & 0 & \frac{B_{32}^2}{2} & \frac{B_{33}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{11}^2}{2} & -\frac{B_{11}^2 h}{10} & -\frac{B_{12}^2}{2} & 0 & \frac{B_{11}^2}{2} & \frac{B_{11}^2 h}{10} & \frac{B_{12}^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_{11}^2 h}{10} & \frac{B_{11}^2 h^2}{60} & \frac{B_{12}^2 h}{12} & 0 & -\frac{B_{11}^2 h}{10} & 0 & -\frac{B_{12}^2 h}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{21}^2}{2} & -\frac{B_{21}^2 h}{12} & -\frac{B_{22}^2}{2} & -\frac{B_{23}^2}{2} & \frac{B_{21}^2}{2} & \frac{B_{21}^2 h}{12} & \frac{B_{22}^2}{2} & \frac{B_{23}^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_{32}^2}{2} & -\frac{B_{33}^2}{2} & 0 & 0 & \frac{B_{32}^2}{2} & \frac{B_{33}^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{K}_{bv}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\mathbf{B}_{11}^3}{5h} & \frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & \frac{\mathbf{B}_{12}^3}{h} & 0 & -\frac{6\mathbf{B}_{11}^3}{5h} & \frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & -\frac{\mathbf{B}_{12}^3}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & \frac{2\mathbf{B}_{11}^3 h}{15} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3 h}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{21}^3}{h} & 0 & \frac{\mathbf{B}_{22}^3}{h} & \frac{\mathbf{B}_{23}^3}{h} & -\frac{\mathbf{B}_{21}^3}{h} & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{22}^3}{h} & -\frac{\mathbf{B}_{23}^3}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & \frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & -\frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\mathbf{B}_{11}^3}{5h} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & -\frac{\mathbf{B}_{12}^3}{h} & 0 & \frac{6\mathbf{B}_{11}^3}{5h} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & \frac{\mathbf{B}_{12}^3}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3 h}{30} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{11}^3}{10} & \frac{2\mathbf{B}_{11}^3 h}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{21}^3}{h} & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{22}^3}{h} & -\frac{\mathbf{B}_{23}^3}{h} & \frac{\mathbf{B}_{21}^3}{h} & 0 & \frac{\mathbf{B}_{22}^3}{h} & \frac{\mathbf{B}_{23}^3}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & -\frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & 0 & 0 & \frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} & \frac{\mathbf{B}_{32}^3}{h} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

[illegible]

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, Inc., 9th edition, 1972.
- [2] J.D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, 1973.
- [3] L. Achimastos. *Appréciation de l'état structurel d'une chaussée souple à partir des observations de dégradations de surface*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, March 1998.
- [4] A. Alaoui and T. Naciri. *Les voies ballastées*. Rapport EUROBALT. CERAM, 1995.
- [5] G. Alfano, L. Rosati, and N. Valoroso. A numerical strategy for finite element analysis of no-tension materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 48 :317–350, 2000.
- [6] J. Alias. *La voie ferrée - Techniques de construction et d'entretien*. Eyrolles, deuxième édition, 1984.
- [7] L. Andersen, S.R.K. Nielsen, and P.H. Kirkegaard. Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates. *Journal of Sound and Vibration*, 241(4) :587–604, 2001.
- [8] D. Aubry, D. Clouteau, and A. Modaressi. Interaction dynamique sol-structure. In *Calcul tridimensionnel en géotechnique*. Presse des Ponts et Chaussées, 1998.
- [9] E. Azanka. *Ecoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées., January 1998.
- [10] K. Bagi. Stress and strain in granular assemblies. *Mechanics of Materials*, 22(165–177), 1996.
- [11] M.C.M. Bakker, M.D. Verweij, B.J. Kooij, and H.A. Dieterman. The traveling point revisited. *Wave Motion*, 29 :119–135, 1999.
- [12] M. Balsan. *Pour un modèle mathématique de la voie ferrée moderne*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées., 1980.
- [13] M. Bats-Villard. *Influence des défauts de liaison sur le dimensionnement et le comportement de chaussées*. PhD thesis, Université de Nantes, 1991.
- [14] P.M. Belotserkovskiy. On the oscillations of infinite periodic beams subjected to moving concentrated force. *Journal of Sound and Vibration*, 193(3) :705–712, 1996.
- [15] P.M. Belotserkovskiy. Forced oscillations of infinite periodic structures. Applications to railway track dynamics. *Vehicle System Dynamics Supplement*, 28 :85–103, 1998.
- [16] V. Bodin. *Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, June 2001.
- [17] V. Bodin, P. Tamagny, K. Sab, and P.-E. Gautier. Fréquence critique de sollicitation lors du tassement à grand nombre de cycles d'un milieu granulaire. Colloque Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires. Champs-sur-Marne, 5-7 Septembre, 2000. *Actes des journées scientifiques du LCPC, tome 2*, pages 291–296, 2000.

- [18] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière : applications en mécanique des solides et des fluides*. CNRS Edition/Eyrolles, 1995.
- [19] C.S. Chang and J. Gao. Non-linear dispersion of plane wave in granular media. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 30(2) :111–128, 1995.
- [20] C.S. Chang and J. Gao. Wave propagation in granular rod using high-gradient theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(1) :52–59, 1997.
- [21] Y.-H. Chen and Y.-H. Huang. Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*., 48 :1–18, 2000.
- [22] J. Chung and G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60 :371–375, 1993.
- [23] D. Clouteau, G. Degrande, and G. Lombaert. Modélisation des vibrations induites par le trafic routier et ferroviaire. *Actes du Cinquième Colloque National en Calcul des Structures. GIENS*., 2001.
- [24] F. Collino and P.B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*., 164(157–171), 1998.
- [25] P.A. Cundall. Formulation of a three-dimensional Distinct element model - Part 1 : A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 25(3) :107–116, 1988.
- [26] M. Cuomo and G. Ventura. A complementary energy formulation of no tension masonry-like solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pages 313–339, 2000.
- [27] F.C.P. de Barros and J.E. Luco. Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load. *Wave Motion*, 19 :189–210, 1994.
- [28] F.C.P. de Barros and J.E. Luco. Stresses and displacement in a layered half-space for a moving line load. *Appl. Math. & Comp.*, 67 :103–134, 1995.
- [29] G. Del Piero. Constitutive equation and compatibility of external loads for linear elastic masonry-like materials. *Meccanica*, 24 :150–162, 1989.
- [30] R.M. Delgado and R.C. Dos Santos. Modelling of railway bridge-vehicle interaction on high speed tracks. *Computers & Structures*, 63(3) :511–523, 1997.
- [31] H. Dieterman and A. Metrikine. Critical velocities of a harmonic load moving uniformly along an elastic layer. *ASME J. Appl. Mech.*, 64 :596–600, 1997.
- [32] H. Dieterman and A. Metrikine. Steady-state displacements of a beam on an elastic half-space due to an uniformly moving constant load. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 16(2) :295–306, 1997.
- [33] H.A. Dieterman and A. Metrikine. The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15(1) :67–90, 1996.
- [34] J. Dinkel and H. Grundmann. Winkler parameters for railway dynamics derived from 3D half-space analysis. In Fryba & Naprstek, editor, *Structural Dynamics - EUROLYN*. Balkema, Rotterdam., 1999.
- [35] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. Eyrolles, 1997.
- [36] T. Ekevid, M.X.D. Li, and N.-E. Wiberg. Adaptive finite element analysis of wave propagation under moving loads induced by high-speed trains. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering - ECCOMAS2000*, Barcelona, 2000.
- [37] T. Ekevid and N.-E. Wiberg. On wave propagation problems associated to high-speed trains. In *European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, Poland, 2001.

- [38] E.S. Eringen and A.C. Suhubi. *Elastodynamics. Vol. 2 - Linear theory*. Academic Press, 1975.
- [39] L. Frýba. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Thomas Telford, 3rd edition, 1999.
- [40] S. Garvilov. Non-stationary problems in dynamics of a string on an elastic foundation subjected to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, 222(3) :345–361, 1999.
- [41] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Masson, deuxième édition, 1996.
- [42] J. Ghabussi and R. Barbosa. Three-dimensional discrete element method for granular materials. *J. Num. & Anal. Methods Geomech.*, 14 :451–472, 1990.
- [43] V.T. Granik and M. Ferrari. Microstructural mechanics of granular materials. *Mechanics of Materials*, 15(301–322), 1993.
- [44] H. Grundmann, M. Lieb, and E. Trommer. The response of a layered half-space to traffic loads moving on its surface. *Arch. Appl. Mech.*, 69 :55–67, 1999.
- [45] L. Gry. *Modélisation du comportement dynamique d’une voie TGV pour la réduction du bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris., November 1995.
- [46] N. Guérin. *Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées., November 1996.
- [47] J.-F. Hamet. Railway noise : Use of Timoshenko model in rail vibration studies. *Acta Acustica*, 85 :54–62, 1999.
- [48] M.S.A. Hardy. The generation of waves in infinite structures by moving harmonic loads. *Journal of Sound and Vibration.*, 180(4) :637–644, 1995.
- [49] K. Henchi, M. Fafard, G. Dhatt, and M. Talbot. Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 199(1) :33–50, 1997.
- [50] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.
- [51] T.J. Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.
- [52] T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert. Space-time element methods for elastodynamics : formulation and error analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :339–363, 1987.
- [53] G.M. Hulbert. Time finite element methods structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :307–331, 1992.
- [54] H.H. Hung and Y.B. Yang. Elastic waves in visco-elastic half-space generated by various vehicle loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.*, 21 :1–17, 2001.
- [55] IWRN-5. Fifth International Workshop on Railway an Tracked Transit System. *Journal of Sound and Vibration (Special issue)*, 193(1), 1996.
- [56] K.L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1992.
- [57] C.J.C. Jones, X. Sheng, and M. Petyt. Simulation of ground vibration from a moving harmonic load on a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 231(3) :739–751, 2000.
- [58] D.V. Jones, D. Le Houedec, A.T. Peplow, and M. Petyt. Ground vibration in the vicinity of a moving harmonic rectangular load on a half-space. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17(1) :153–166, 1998.
- [59] D.V. Jones and M. Petyt. Ground vibration in the vicinity of a strip load : an elastic layer on an elastic half-space. *Journal of Sound and Vibration*, 61(1) :1–18, 1993.

- [60] D.V. Jones and M. Petyt. Ground vibration in the vicinity of a vicinity of a rectangular load on a half-space. *Journal of Sound and Vibration*, 161(1) :141–159, 1993.
- [61] P.H. Kirkegaard, S.R.K. Nielsen, S. Krenk, and L. Kellezi. Radiation of Air-Borne Noise in Non-Homogeneous Wind and Temperature Fields using FEM Analysis. In Frýba & Náprstek, editor, *Structural Dynamics - EURODYN '99*, Rotterdam, 1999. Balkena.
- [62] K. Knothe and Y. Wu. Receptance behaviour of railway track and subgrade. *Archive of Applied Mechanics*, 68 :457–470, 1998.
- [63] A.W.M Kok. Lumped impulses, discrete displacements and moving load analysis. *HERON*, 42(1), 1997.
- [64] A.W.M. Kok. Finite element models for the steady state analysis of moving loads. *HERON*, 45(1) :53–61, 2000.
- [65] S. Krenk, L. Kellezi, S.R.K. Nielsen, and P.H. Kirkegaard. Finite elements and transmitting boundary conditions for moving loads. In Frýba & Náprstek, editor, *Structural Dynamics - EURODYN '99*, Rotterdam, 1999. Balkena.
- [66] V. Krylov. Generation of ground vibration by superfast trains. *Applied Acoustics*, 44(149–164), 1995.
- [67] V. Krylov. Vibration impact of high-speed trains. I. Effect of track dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100 :3121–3134, 1996.
- [68] V. Krylov. Vibration impact of high-speed trains. I. Effect of track dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101 :3810, 1997. Erratum.
- [69] V. Krylov, A.R. Dawson, M.E. Heelis, and A.C. Collop. Rail movement and ground waves caused by high-speed trains approaching track-soil critical velocities. In *Pro. Instn. Mech. Engrs.*, volume 214, pages 107–116, 2000.
- [70] T. Krzyzynski, T. Popp, and H. Kruse. The dynamics of railway tracks based on the theory of periodic structures. *ZAMM - Z. Angew. Math. Mech.*, 78, 1998. S1.
- [71] P. Le Tallec. *Introduction à la dynamique des structures*. Edition Ellipses, 2000. (Cours de l'Ecole Polytechnique).
- [72] G. Lefeuvre-Mesgouez and D. Le Houedec. Propagation d'ondes dans un massif soumis à des charges roulantes se déplaçant à vitesse élevée. In *14e Congrès Français de Mécanique, Toulouse*, 1999.
- [73] G. Leufeuvre-Mesgouez. *Propagation d'ondes dans un massif soumis à des charges se déplaçant à vitesse constante*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [74] X.D. Li and N.-E. Wiberg. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156 :211–229, 1998.
- [75] M. Lieb and B. Sudret. A fast algorithm for soil dynamics calculations by wavelet decomposition. *Archive of Applied Mechanics.*, 68 :147–157, 1998.
- [76] G. Lombaert, G. Degrande, and D. Clouteau. Numerical modelling of free field traffic-induced vibration. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.*, 19(473–488), 2000.
- [77] M. Lucchesi, C. Padovani, and G. Pasquinelli. On the numerical solution of equilibrium problems for elastic solids with bounded tensile strength. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 127 :37–56, 1995.
- [78] F. Maddalena and M. Ferrari. Viscoelasticity of granular materials. *Mechanics of Materials*, 20(241–250), 1995.
- [79] S. Melin. Wave propagation in granular assemble. *Physical Review*, 49(3), 1994.

- [80] A. Metrikine and H. Dieterman. Instability of vibration of a mass moving uniformly along an axial compressed beam on a viscoelastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5) :567–576, 1997.
- [81] A. Metrikine and K. Popp. Vibration of a periodically supported beam on an elastic half-space. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 18 :679–701, 1999.
- [82] A. Metrikine and A.C.M. Vrouwenvelder. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel : two-dimensional model. *Journal of Sound and Vibration*, 234(1) :43–66, 2000.
- [83] A.V. Metrikine and H.A. Dieterman. Lateral vibration of an axially compressed beam on an elastic half-space due to a moving lateral load. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 :147–158, 1999.
- [84] H.-B. Mühlhaus and F.. Oka. Dispersion and wave propagation in discrete and continuous models for granular materials. *International Journal in Solids & Structures*, 33 :2841–2858, 1996.
- [85] V.H. Nguyen, D. Duhamel, and B. Nedjar. Calcul de structures soumises à une charge mobile par la méthode des éléments finis. *XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3–7 Septembre*, 2001.
- [86] V.H. Nguyen, D. Duhamel, and B. Nedjar. A no-tension model for granular material. In *2nd European Conference on Computational Mechanics - ECCM2001*, June 2001.
- [87] M. Olsson. On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2) :299–307, 1991.
- [88] X. Oviedo. *Etude du comportement du ballast par un modèle micromécanique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, May 2001.
- [89] X. Oviedo, K. Sab, and P.-E. Gautier. Etude du comportement du ballast ferroviaire par un modèle micromécanique. Colloque Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires. Champs-sur-Marne, 5-7 Septembre, 2000. *Actes des journées scientifiques du LCPC, tome 2*, pages 339–344, 2000.
- [90] G. Pan, H. Okada, and S.N. Atluri. Nonlinear transient dynamic analysis of sol-pavement interaction under moving load : a couple BEM-FEM approach. *Engineering Analysis with Boundary Element.*, 14(99–112), 1994.
- [91] T. Panzeca and G. Del Piero. Constitutive equations for no-tension materials. *Meccanica*, 23 :88–93, 1988.
- [92] B. Picoux and D. Le Houedec. Propagation d’ondes à la surface d’un massif soumis à un effort latéral et vertical dû à un trafic ferroviaire. In *XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy*, 2001.
- [93] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [94] V. Profillidis. *La voie ferrée et sa fondation - modélisation mathématique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.
- [95] K.M. Rasmussen, S.R.K. Nielsen, and P.H. Kirkegaard. Boundary element method solution in the time domain for a moving time-dependent force. *Computers & Structures*, 79 :691–701, 2001.
- [96] C. Renard and P. Orsero. Influence de l’imperfection de la voie sur le comportement dynamique du pont au passage d’un train. *14ième Congrès Français de Mécanique, Toulouse*, 1999.
- [97] J. R. Rieker, Y.-H. Lin, and M.W. Trethewey. Discretisation consideration in moving load finite element beam models. *Finite Element in Analysis and Design*, 21 :129–144, 1996.
- [98] M.H. Sadd, J. Gao, and A. Shukla. Numerical analysis of wave propagation through assemblies of elliptical particles. *Computers and Geotechnics*, 20(3/4) :323–343, 1997.

- [99] R. Sauvage and G. Larible. La modélisation par "éléments finis" des couches d'assise de la voie ferrée. *Revue Générale des Chemins de Fer.*, September 1982.
- [100] X. Sheng, C.J.C. Jones, and M. Petyt. Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 225(1) :3–28, 1999.
- [101] X. Sheng, C.J.C. Jones, and M. Petyt. Ground vibration generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 228(1) :129–156, 1999.
- [102] A. Shulka, M.H. Sadd, and H. Mei. Experimental and computational modelling of wave propagation in granular materials. *Experimental Mechanics*, 30(3), 1991.
- [103] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. de Borst, and C. Esvelde. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. Part 1 : Formulation of the boundary value problem. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 18(749–768), 1999.
- [104] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. de Borst, and C. Esvelde. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. Part 2 : Analysis of the wave characteristics in regard to high-speed railways track. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 18(769–784), 1999.
- [105] A.S.J. Suiker, A.V. Metrikine, and R. De Borst. Dynamic behaviour of a layer of discrete particles. Part 2 : Response to a uniformly moving harmonical vibrating load. *Journal of Sound and Vibration.*, 240(1) :19–39, 2001.
- [106] C. Wassgren. *Vibration of Granular Materials*. PhD thesis, Institut California of Technology, 1997.
- [107] J.P. Wolf and C. Song. *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*. Wiley, NewYork, 1996.
- [108] A.R.M. Wolfert, H.A. Dietermann, and A.V. Metrikine. Passing through the "elastic wave barrier" by a load moving along a waveguide. *Journal of Sound and Vibration*, 203(4) :597–606, 1997.
- [109] J.-J. Wu, A.R. Whittaker, and M.P. Cartmell. The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads. *Computers anf Structures*, 78 :789–799, 2000.
- [110] Y.-B. Yang and H.-H. Hung. A 2.5D finite/infinite element approach for modelling visco-elastic bodies subjected to moving loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 51(1317–1336), 2001.
- [111] H.R. Yerli, B. Temel, and E. Kiral. Multi-wave transient and harmonic infinite elements for two-dimensional unbounded domain problems. *Computers and Geotechnics*, 24(185–206), 1999.
- [112] Y.-G. Zhang and J. Ballman. Two techniques for the absorption of elastic waves using an artificial transition layer. *Wave Motion*, 25(15–33), 1997.
- [113] Y. Zhu, A. Shukla, and M.H. Sadd. The effect of microstructural fabric on dynamic load transfer in two dimensional assemblies of elliptical particles. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(8) :1283–1303, 1996.
- [114] H.S. Zibdeh and R Rackwitz. Moving loads on beams with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration.*, 195(1) :85–102, 1996.
- [115] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method. Volume 2 : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity*. McGraw-Hill, 1991.

Résumé

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE STRUCTURES NON-LINÉAIRES SOUMISES À DES CHARGES MOBILES

Ce travail a pour but l'étude de la dynamique de structures non-linéaires soumises à des passages de véhicules. Le cas d'un demi-espace multi-couche visco-élastique soumis à une charge mobile est premièrement résolu par une méthode semi-analytique. Il permet de comprendre les phénomènes physiques et peut servir à valider des approches plus complexes élaborées dans la suite. Plusieurs études sur ce problème ont été réalisées mais il en existe encore peu qui tiennent compte de la non-linéarité des matériaux. Ces non-linéarités, qui peuvent être très forte dans certains matériaux (par exemple le ballast), causent des surcharges dynamiques plus importantes. On considère ici deux types de non-linéarité : l'élasticité non-linéaire et l'unilatéralité. La structure est étudiée avec des modèles très simples en unidimensionnel ou plus complexes en tridimensionnel. La méthode des éléments finis est choisie pour les calculs. Le cas 1D consiste en un problème uniaxial d'une barre et un problème de flexion d'une poutre posée sur un système de ressorts-amortisseurs. Le cas 3D utilise un modèle de matériau ballast qui est élastique (non-linéaire) en compression et unilatéral dans les directions principales. Comme on s'intéresse au régime permanent, on écrit les équations des éléments finis et on les résout dans le repère mobile en utilisant un changement de variable. Dans le cas où la vitesse de la charge devient supersonique, la méthode des éléments finis dans le repère mobile n'est plus valable et on doit utiliser une autre approche dans laquelle le changement de variable est réalisé à partir de l'équation discrétisée. On montre aussi pour le modèle uniaxial, dans le cas où la vitesse de la charge se situe entre la vitesse de l'onde de compression et la vitesse de l'onde de tension, qu'il peut exister des ondes de chocs dans le régime permanent. Les résultats obtenus sont présentés et sont comparés avec ceux des cas linéaires. Ils montrent les influences importantes de la non-linéarité sur la réponse dynamique des structures.

Mots clés : charge mobile, comportement unilatéral, dynamique nonlinéaire, éléments finis non-linéaires, régime permanent.

Abstract

DYNAMICAL BEHAVIOUR OF NONLINEAR STRUCTURES UNDER MOVING LOADS

The aim of this work is to study the nonlinear dynamic of structures under passages of vehicles. The problem of a multi-layer viscoelastic halfspace under a moving load is firstly solved by a semi-analytical method. It allows to understand the physical phenomena and may be used to valid the more complex approaches established later. Many studies on this problem have been realised but still few of its take into account the non-linearity of materials. These non-linearities, which may be very important in some materials (e.g. the ballast), cause the more important dynamical overloadings. We consider here two kinds of nonlinearity : the nonlinear elastic behaviour and the unilaterality. The structure is studied with simple models in one dimension or more complex in three dimensions. The finite element method is chosen in the analyses. The 1D case involves the problem of an uniaxial bar and the problem of a flexion beam posed on viscoelastic strings system. The 3D case uses a ballast material model which is (nonlinear) elastic in compression and is unilateral in principal directions. As we are interested in the stationary solution, we establish and resolve the finite element equations in the moving coordinates by using of a variable transformation. When the load velocity becomes supersonic, the finite element method is no longer valid and we have to use another approach in which the variable transformation is based on discretized equations. We show also for the uniaxial model, when the load velocity is between the pression wave velocity and the tension ones, that the shock waves may appear in the stationary state. The obtained results are presented and compared with the linear analysis's ones. These results show the important influences of the nonlinearity on the dynamical response of structures.

Keywords : moving load, unilateral constitutive, nonlinear dynamic, nonlinear finite element, stationary state.